Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schäfer, Schlesinger, Schottky

von

K. Hensel.

Band 152.

In vier Heften.

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1923.

Greg R.R.3

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schäfer, Schlesinger, Schottky

von

K. Hensel.

Band 152.

Heft 1/2.

Ausgegeben den 22. September.

Berlin und Leipzig

VEREINIGUNG WISSENSCHAFTLICHER VERLEGER
WALTER DE GRUYTER & CO.
VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1922

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 152. Heft 1/2.

Inhaltsverzeichnis.

Mittag-Leffler, G., Der Satz von *Cauchy* über das Integral einer Funktion zwischen imaginären Grenzen . . . . . Seite 1

Haupt, Otto, Über Asymptoten ebener Kurven . . . . . — 6

Jung, Heinrich W. E., Über die *Salmon*schen Tangenten einer algebraischen Fläche — 11

Kamke, E., Über die simultane Zerfällung ganzer Zahlen in 1-te und n-te Potenzen — 30

Mehmke, R., Einige Sätze über Matrizen . . . . . — 33

Schwering, K., Die Siebenteilung der lemniskatischen Funktion sin am (u) . — 40

Bindschedler, Karl, Die Teilungskörper der elliptischen Funktionen im Bereich der dritten Einheitswurzel . . . . . — 49

Weyl, Gertrud, Hinreichende Bedingungen des Extremums bei einer neuen Art von isoperimetrischen Problemen . . . . . — 76

Sturm, Rudolf, Über das größte Tetraeder, wenn die Inhalte der Flächen gegeben sind . . . . . — 90

Sturm, Rudolf, Zwei Minimalprobleme . . . . . — 99

Kienast, Alfred, Über die Darstellung analytischer Funktionen durch bestimmte Integrale . . . . . — 109

Delaunay, B., Zur Bestimmung algebraischer Zahlkörper durch Kongruenzen; eine Anwendung auf die *Abel*schen Gleichungen . . . . . — 120

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Gen.
Harr.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 152.

Mittag-Leffler, G., Der Satz von *Cauchy* über das Integral einer Funktion zwischen imaginären Grenzen . . . . . Seite 1

Haupt, Otto, Über Asymptoten ebener Kurven . . . . . — 6

Jung, Heinrich W. E., Über die *Salmon*schen Tangenten einer algebraischen Fläche — 11

Kamke, E., Über die simultane Zerfällung ganzer Zahlen in 1-te und n-te Potenzen — 30

Mehmke, R., Einige Sätze über Matrizen . . . . . — 33

Schwering, K., Die Siebenteilung der lemniskatischen Funktion sin am (u) . — 40

Bindschedler, Karl, Die Teilungskörper der elliptischen Funktionen im Bereich der dritten Einheitswurzel . . . . . — 49

Weyl, Gertrud, Hinreichende Bedingungen des Extremums bei einer neuen Art von isoperimetrischen Problemen . . . . . — 76

Sturm, Rudolf, Über das größte Tetraeder, wenn die Inhalte der Flächen gegeben sind . . . . . — 90

Sturm, Rudolf, Zwei Minimalprobleme . . . . . — 99

Kienast, Alfred, Über die Darstellung analytischer Funktionen durch bestimmte Integrale . . . . . — 109

Delaunay, B., Zur Bestimmung algebraischer Zahlkörper durch Kongruenzen; eine Anwendung auf die *Abel*schen Gleichungen . . . . . — 120

Reye, Th., Die kubische Raumkurve als Leitkurve von Regelflächen dritten bis sechsten Grades . . . . . — 125

Hasse, Helmut, Über die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Körper der rationalen Zahlen . . . . . — 129

Burkhardt, F., Über eine Verallgemeinerung der Tetraedergruppe . . . . — 149

Staude, Otto, Über Kollineationen und Korrelationen im Raume . . . . . — 156

Rychlik, K., Eine stetige nicht differenzierbare Funktion im Gebiete der *Hensel*schen Zahlen . . . . . — 178

Kürschák, Josef, Irreduzible Formen . . . . . — 180

Rados, Gustav, Bemerkungen und Ergänzungen zum Beweis eines *Kummer*schen Theorems . . . . . — 192

Riebesell, P., Über die Lehre vom statistischen Ausgleich . . . . . — 198

Hasse, Helmut, Über die Äquivalenz quadratischer Formen im Körper der rationalen Zahlen . . . . . — 205

Hensel, Kurt, Über ein neues Normenrestsymbol und seine Anwendung auf die Theorie der Normenreste in allgemeinen algebraischen Körpern . . — 225

Brandt, H., Klassenanzahlen bei linearen Substitutionen . . . . . — 235

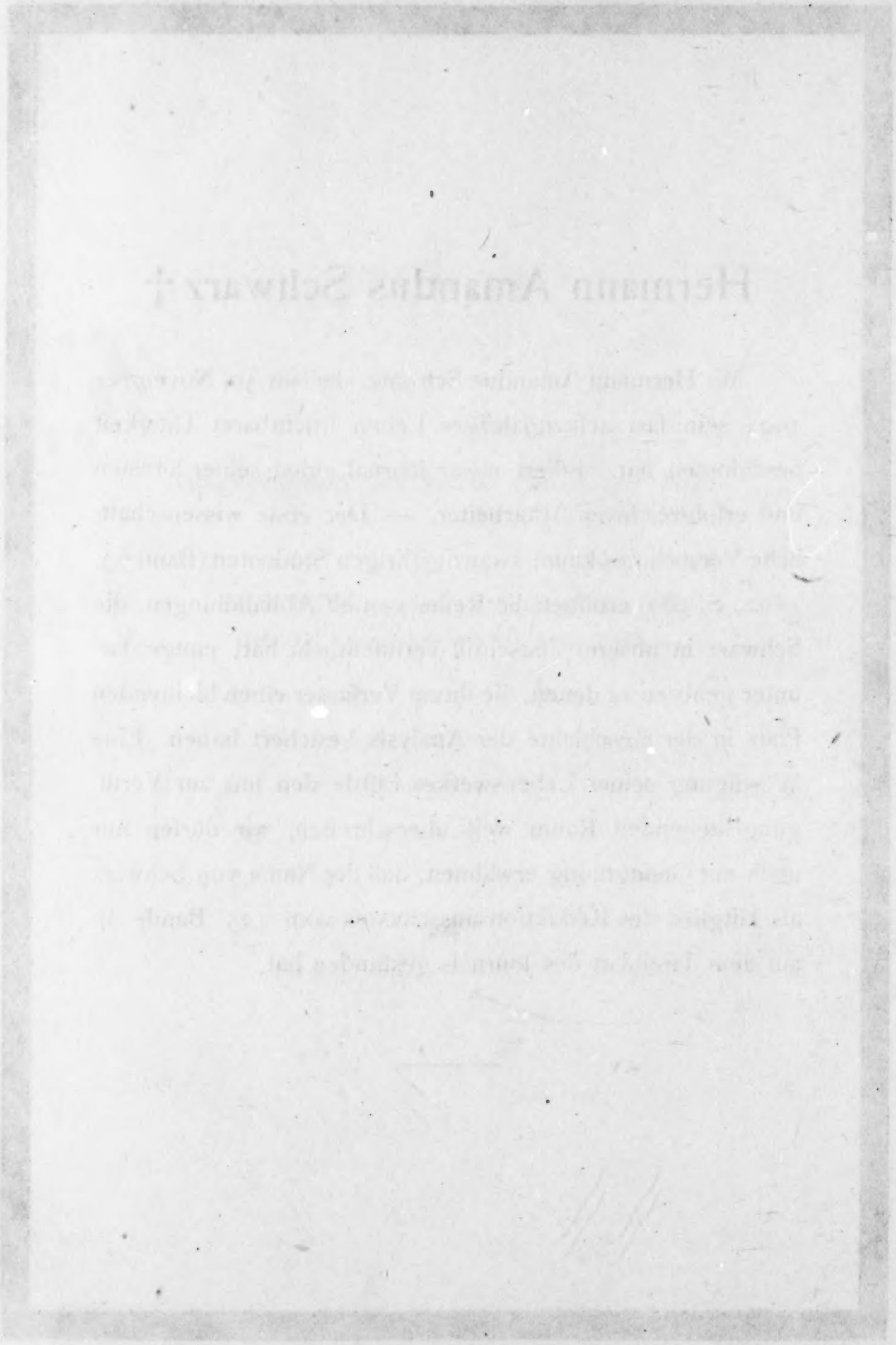
Haupt, Otto, Über Asymptoten ebener Kurven . . . . . — 239

Ausgabedaten der Hefte von Band 152.

Heft 1/2 ausgegeben am 22. September 1922
Heft 3/4 ausgegeben am 20. April 1923

Hermann Amandus Schwarz †

Mit Hermann Amandus Schwarz, der am 30. November 1921 sein fast achtzigjähriges Leben fruchtbarer Tätigkeit beschlossen hat, verliert unser Journal einen seiner ältesten und erfolgreichsten Mitarbeiter. — Der erste wissenschaftliche Versuch des kaum zwanzigjährigen Studenten (Band 63, 1862, S. 309) eröffnet die Reihe von elf Abhandlungen, die Schwarz in unserer Zeitschrift veröffentlicht hat; einige darunter gehören zu denen, die ihrem Verfasser einen bleibenden Platz in der Geschichte der Analysis gesichert haben. Eine Würdigung seines Lebenswerkes würde den uns zur Verfügung stehenden Raum weit überschreiten, wir dürfen nur noch mit Genugtuung erwähnen, daß der Name von Schwarz als Mitglied des Redaktionsausschusses vom 125. Bande ab auf dem Titelblatt des Journals gestanden hat.



Der Satz von *Cauchy* über das Integral einer Funktion zwischen imaginären Grenzen.

Von Herrn *G. Mittag-Leffler* in Djursholm.

Malmsten hat als erster einen vollkommen strengen Beweis des *Cauchy*schen Satzes veröffentlicht, ohne dabei den Durchgang durch ein Doppelintegral zu nehmen [1]). Wenige Jahre später habe ich [2]) einen anderen Beweis veröffentlicht, der direkter und einfacher ist, und der zugleich den Satz von *Laurent* umfaßt, während die über die betrachteten Funktionen zu treffenden Voraussetzungen geringer sind als bei *Cauchy*. Die neueren Untersuchungen von *Borel* [3]) gaben mir die Anregung, auf diesen Beweis zurückzukommen; ich gebe im folgenden einen fast wörtlichen Bericht über denselben.

Wir betrachten der größeren Einfachheit wegen die konzentrischen Kreise C_q $(q = 0, 1, \ldots, n)$, wo $C_{q+1} > C_q$ ist, und den diese alle umschließenden mit ihnen konzentrischen Kreis C_{n+1}, den wir auch mit E bezeichnen werden [4]). Es seien x_{qr} $(r = 0, 1, \ldots, n)$ Punkte auf der Peripherie der Kreise C_q $(q = 0, 1, \ldots, n+1)$ von der Art, daß

$$x_{q0} = x_{qn};\quad \arg x_{qr} > \arg x_{q,r-1};\quad \arg x_{q+1,r} = \arg x_{qr};\quad x_{q+1,r} = (1 + \varepsilon_{qn})\, x_{qr}$$

ist, wo ε_{qn} eine positive Größe bedeutet, die für $q = 0, 1, \ldots, n+1$ mit ins Unendliche wachsendem n gegen Null strebt.

Unter $F(x)$ verstehen wir eine auf eindeutige Weise gegebene Funktion, die für alle Punkte x_{qr} $(r = 0, 1, \ldots, n)$ einen endlichen Wert besitzt, und es werde nunmehr der Ausdruck

---

[1]) *C. J. Malmsten,* Om definita integraler mellan imaginära gränser, Svenska Vet. Akad.'s Förhandl. Bd. 6. Nr. 3; 7. April 1865.

[2]) Försök till ett nytt bevis för en sats inom de definita integralernas teori, Svenska Vet. Akad.'s Översikt, 8. Oktober 1873; abgedruckt Göttinger Nachrichten, 1875, S. 65, 24. Februar. *Osgood* (Encyklop. d. math. Wiss. II. B. 1) ebenso wie *Bieberbach* in seinem sorgfältigen und eingehenden Artikel (ebenda, II. C. 4) erwähnen weder den Beweis von *Malmsten* noch den meinigen.

[3]) *E. Borel*, Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe, Paris 1917.

[4]) An Stelle der Kreise E und C_q kann man unter anderem auch die von mir später sogenannten einander ähnlichen Sterne (siehe „Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène", Première Note, S. 47, Acta Mathem. Bd. 23, 1899) einführen, wie ich dies in meiner Note von 1873 getan habe.

$$\frac{(1+\varepsilon_{qn})\,x_{q,r-1}\,F[(1+\varepsilon_{qn})\,x_{q,r-1}]-x_{q,r-1}\,F(x_{q,r-1})}{(1+\varepsilon_{qn})\,x_{q,r-1}-x_{q,r-1}}-\frac{x_{qr}\,F(x_{qr})-x_{q,r-1}\,F(x_{q,r-1})}{x_{qr}-x_{q,r-1}}$$
$$=\varepsilon_{nqr}$$

eingeführt. Multipliziert man diesen mit $x_{qr}-x_{q,r-1}$, so erhält man:

$$\frac{F[(1+\varepsilon_{qn})\,x_{q,r-1}]\,(1+\varepsilon_{qn})\,(x_{qr}-x_{q,r-1})}{\varepsilon_{qn}}$$
$$-\frac{1}{\varepsilon_{qn}}F(x_{q,r-1})\,(x_{qr}-x_{q,r-1})$$
$$-(x_{qr}\,F(x_{qr})-x_{q,r-1}\,F(x_{q,r-1}))=\varepsilon_{nqr}\,(x_{qr}-x_{q,r-1})$$

oder mit Rücksicht auf die Formel $x_{q+1,r}=(1+\varepsilon_{qn})\,x_{qr}$:

$$-\frac{1}{\varepsilon_{qn}}F(x_{q+1,r-1})\,(x_{q+1,r}-x_{q+1,r+1})$$
$$-\frac{1}{\varepsilon_{qn}}F(x_{q,r-1})\,(x_{qr}-x_{q,r-1})$$
$$-(x_{qr}\,F(x_{qr})-x_{q,r-1}\,F(x_{q,r-1}))=\varepsilon_{nqr}\,(x_{qr}-x_{q,r-1}).$$

Summiert man in bezug auf r von 1 bis n, so findet man wegen der Gleichung $x_{q0}=x_{qn}$:

$$\sum_{r=1}^{n}F(x_{q+1,r-1})\,(x_{q+1,r}-x_{q+1,r-1})-\sum_{r=1}^{n}F(x_{q,r-1})\,(x_{qr}-x_{q,r-1})$$
$$=\sum_{r=1}^{n}\varepsilon_{qn}\,\varepsilon_{nqr}\,(x_{qr}-x_{q,r-1}),$$

und wenn man

$$\sum_{C_q}F(x)\,\delta x=\sum_{r=1}^{n}F(x_{q,r-1})\,(x_{qr}-x_{q,r-1})$$

setzt,

$$\sum_{C_{q+1}}F(x)\,\delta x-\sum_{C_q}F(x)\,\delta x=\sum_{r=1}^{n}\varepsilon_{qn}\,\varepsilon_{nqr}\,(x_{qr}-x_{q,r-1}).$$

Summiert man in dieser Gleichung wieder in bezug auf q von 0 bis n, so erhält man:

$$\sum_{C_{n+1}}F(x)\,\delta x-\sum_{C_0}F(x)\,\delta x=\sum_{q=0}^{n}\sum_{r=1}^{n}\varepsilon_{qn}\,\varepsilon_{nqr}\,(x_{qr}-x_{q,r-1}).$$

Bisher war die Funktion $F(x)$ nur der Bedingung unterworfen, für jeden der Punkte x_{qr} einen endlichen Wert zu besitzen; wir unterwerfen sie nunmehr den folgenden weiteren Voraussetzungen: es sei

$$\varepsilon_{qn}\leqq\frac{l}{L_q\,(n+1)},\quad|\varepsilon_{nqr}|\leqq\varepsilon;$$

dabei bedeutet L_q den Umfang des Kreises C_q, l den des Kreises E und ε eine positive Größe, die für hinreichend große Werte von n beliebig klein gemacht werden kann. Es ist alsdann

$$\left|\sum_{C_{n+1}}F(x)\,\delta x-\sum_{C_0}F(x)\,\delta x\right|<\varepsilon\cdot l.$$

Läßt man nun n unbegrenzt wachsen und setzt voraus, daß die Grenzwerte der Summen

$$\int_{C_0}F(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{C_0}F(x)\,\delta x,\quad\int_{E}F(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{E}F(x)\,\delta x$$

existieren, so ergibt die letzte Ungleichung

$$\int_E F(x)\,dx = \int_{C_0} F(x)\,dx\,.$$

Bis jetzt haben wir vorausgesetzt, daß $F(x)$ für die Punkte x_{qr} $(q = 0, 1, \ldots, n+1;\ r = 0, 1, \ldots, n)$ endliche Werte besitzen möge; wir bezeichnen nunmehr mit M_0 das Maximum des absoluten Betrages von $F(x)$ auf der Peripherie des Kreises C_0 und mit l_0 den Umfang dieses Kreises. Wir setzen des weiteren voraus, daß $M_0 l_0$ mit dem Halbmesser des Kreises C_0 sich unbegrenzt der Null annähert. Aus den Gleichungen

$$\sum_{C_0} F(x)\,\delta x = \sum_{r=1}^{n} F(x_{0,r-1})\,(x_{0r} - x_{0,r-1})\,,$$

$$\sum_{r=1}^{n} |F(x_{0,r-1})|\,|x_{0r} - x_{0,r-1}| \leqq M_0 l_0, \quad |\sum_{C_{n+1}} F(x)\,\delta x| < |\sum_{C_0} F(x)\,\delta x| + \varepsilon l$$

ergibt sich dann:

$$\int_E F(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{C_{n+1}} F(x)\,\delta x = 0\,.$$

Das eben erhaltene Ergebnis kann in den folgenden Satz gefaßt werden: „Es sei E ein Kreis mit dem Mittelpunkte 0 und dem Halbmesser R [1]), C_0 ein konzentrischer Kreis mit dem kleineren Halbmesser R_0. Wir betrachten eine Menge von Punkten $\varrho e^{\vartheta i}$ von folgender Beschaffenheit: die Werte von ϱ mögen eine in dem Intervall $R_0 \leqq \varrho \leqq R$ überall dichte Punktmenge bilden und jedem solchen ϱ-Werte möge eine in dem Intervalle $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ überall dichte Menge von ϑ-Werten entsprechen. Es sei $F(\varrho e^{\vartheta i})$ eine eindeutig gegebene Funktion, die in jedem Punkte $\varrho e^{\vartheta i}$ einen endlichen Wert besitzt und die folgende Eigenschaften hat:

Für ein beliebig klein vorgeschriebenes positives ε sollen sich stets zwei andere Größen δ und δ_1 so angeben lassen, daß allemal

$$\left|\frac{\varrho_1 e^{i\vartheta} F(\varrho_1 e^{i\vartheta}) - \varrho e^{i\vartheta} F(\varrho e^{i\vartheta})}{(\varrho_1 - \varrho)\,e^{i\vartheta}} - \frac{\varrho e^{i\vartheta_1} F(\varrho e^{i\vartheta_1}) - \varrho e^{i\vartheta} F(\varrho e^{i\vartheta})}{\varrho\,(e^{i\vartheta_1} - e^{i\vartheta})}\right| < \varepsilon,$$

solange

$$0 < |\varrho_1 - \varrho| < \delta; \quad 0 < |\vartheta_1 - \vartheta| < \delta_1\,.$$

Setzt man dann für jedes ϱ der oben definierten Menge

$$\int_{C_\varrho} F(x)\,dx = \lim_{\delta_1 \to 0} \sum_{\varkappa=1}^{n} F(\varrho e^{\vartheta_\varkappa i})\,\varrho\,(e^{\vartheta_\varkappa i} - e^{\vartheta_{\varkappa-1} i}),$$

wo die $\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n = \vartheta_0$ der ϱ entsprechenden Menge der ϑ entnommen sind und der Bedingung $|\vartheta_\varkappa - \vartheta_{\varkappa-1}| < \delta_1$ genügen, und wo die Existenz der rechter Hand auftretenden Grenzwerte vorausgesetzt wird, so besteht die Gleichung

$$\int_E F(x)\,dx = \int_{C_\varrho} F(x)\,dx = \int_{C_0} F(x)\,dx\,.$$

Es möge ferner vorausgesetzt werden, daß für alle Werte von x, die der Peripherie des Kreises C_0 angehören, die Funktion $F(x)$ dem absoluten Betrage nach unter einer endlichen Größe bleibt, und daß das Produkt aus dieser Größe und dem Umfang von C_0 gegen Null strebt, wenn $R_0 \to 0$, dann gilt

---

[1]) Siehe die Fußnote [4]) auf Seite 1.

$$\int_E F(x)\,dx = 0\,.\text{“}$$

Wie man sieht, umfaßt mein Satz als besondere Fälle die Sätze von *Cauchy* und *Laurent*. Man braucht nämlich nur zu setzen:.

$$f(x) = xF(x);\ x = \varrho e^{iv}$$

und der Funktion $f(x)$ die Bedingung aufzuerlegen:

A. „$f(x)$ möge eindeutig und stetig sein in jedem in E enthaltenen Bereiche“, ferner zu fordern, daß

B. $$\text{„}\frac{f(\varrho_1 e^{iv_1}) - f(\varrho e^{iv_1})}{(\varrho_1 - \varrho)\,e^{iv_1}} - \frac{f(\varrho e^{iv_1}) - f(\varrho e^{iv})}{\varrho(e^{iv_1} - e^{iv})} = \omega$$

gesetzt, wenn die Punkte ϱe^{iv}, $\varrho_1 e^{iv_1}$, ϱe^{iv_1} in E liegen, einem beliebig kleinen positiven ε zwei positive Größen δ, δ_1 so zugeordnet werden können, daß

$$|\omega| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |\varrho_1 - \varrho| < \delta,\ |v_1 - v| < \delta_1.\text{“}$$

Dann folgt der Satz von *Cauchy* aus diesen beiden Voraussetzungen.

Man sieht, daß die Gleichung B. durch die folgende ersetzt werden kann:

$$\frac{f(\varrho_1 e^{iv_1}) - f(\varrho e^{iv})}{\varrho_1 e^{iv_1} - \varrho e^{iv}} - \frac{f(\varrho e^{iv_1}) - f(\varrho e^{iv})}{\varrho\,(e^{iv_1} - e^{iv})} = \omega\,\frac{(\varrho_1 - \varrho)\,e^{iv_1}}{\varrho_1 e^{iv_1} - \varrho e^{iv}},$$

wo

$$|\omega|\left|\frac{(\varrho_1 - \varrho)\,e^{iv_1}}{\varrho_1 e^{iv_1} - \varrho e^{iv}}\right| < |\omega| < \varepsilon$$

für $|\varrho_1 - \varrho| < \delta,\ |v_1 - v| < \delta_1$.

Setzen wir jetzt voraus,

C. „daß sich zu

$$\frac{f(\varrho e^{iv_1}) - f(\varrho e^{iv})}{\varrho\,(e^{iv_1} - e^{iv})}$$

eine Größe $f'_v(\varrho e^{iv})$ auf eindeutige Weise so bestimmen lasse, daß für $|v_1 - v| < \delta_1$

$$\left|\frac{f(\varrho e^{iv_1}) - f(\varrho e^{iv})}{\varrho\,(e^{iv_1} - e^{iv})} - f'_v(\varrho e^{iv})\right| < \varepsilon\,.$$

sei“, dann erhält man für $|\varrho_1 - \varrho| < \delta$:

$$\left|\frac{f(\varrho_1 e^{iv_1}) - f(\varrho e^{iv})}{\varrho_1 e^{iv_1} - \varrho e^{iv}} - f'_v(\varrho e^{iv})\right| < 2\varepsilon\,.$$

D. „Setzen wir

$$x = \varrho e^{iv},\ h = \varrho_1 e^{iv_1} - \varrho e^{iv},$$

so gehört, wenn x innerhalb E gelegen ist, zu jedem positiven ε ein ebenfalls positives η, so daß für $|h| < \eta$

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'_v(x)\right| < 2\varepsilon.\text{“}$$

Die Bedingungen A. und D. sind diejenigen, die man gewöhnlich als die *Cauchy*schen [1]) bezeichnet.

Mein Beweis, der statt der Bedingungen A. und D. die Bedingungen A. und B. voraussetzt, ist 27 Jahre vor dem des Herrn *Goursat* veröffentlicht worden, der

---

[1]) *Augustin-Louis Cauchy*, „Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires“. Paris, août 1825. Comptes Rendus 1846.

seinerseits an Stelle der *Cauchy* zugeschriebenen Bedingung D. voraussetzt, daß diese Bedingung nicht für den ganzen Bereich *E gleichmäßig* erfüllt sei, sondern nur für jeden einzelnen Punkt dieses Bereichs [1]).

Die *Goursat*sche Bedingung umfaßt die von mir aufgestellte nicht, sie ist aber auch nicht unter dieser enthalten [2]).

---

[1]) *E. Goursat*, „Démonstration du théorème de *Cauchy*", pag. 197—200, Acta Math., T. 4, 1884. — „Sur la définition générale des fonctions analytiques d'après *Cauchy*", Transact. American Math. Soc., Vol. 1, 1900, pag. 14—16.

Alfred Pringsheim, „Über den *Goursat*schen Beweis des *Cauchy*schen Integralsatzes", Transact. American Math. Soc., Vol. 2, 1901, pag. 413—421.

[2]) Eine erste Redaktion dieser Note ist in den Comptes Rendus t. 173, S. 1041 (séance du 28. nov. 1921) erschienen; da jedoch in dieser die Anwendung meines allgemeinen Satzes auf den speziellen Satz von *Cauchy* nicht ganz befriedigend war, habe ich eine neue Fassung in den Comptes Rendus vom 20. März 1922, t. 174, S. 789 gegeben.

Über Asymptoten ebener Kurven.

Von Herrn *Otto Haupt* in Erlangen.

---

1. *Vorbemerkungen.*

Bezogen auf rechtwinklige kartesische Koordinaten x, y, seien gegeben die beiden Kurven $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch die Gleichungen

$$(\mathfrak{A}) \qquad y = f(x),$$

$$(\mathfrak{B}) \qquad y = F(x).$$

Hier und im folgenden seien $f(x)$ und $F(x)$ für alle endlichen Werte von x $(0 < a \leqq x)$ eindeutige und n-mal stetig differenzierbare Funktionen $(n \geqq 1)$ der reellen Veränderlichen x. Die *„abgeleiteten" Kurven von* $\mathfrak{A}$

$$y = f^{(\nu)}(x) = \frac{d^\nu f(x)}{d x^\nu}$$

sollen *mit* $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ *bezeichnet* werden $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Statt $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ wird dementsprechend im folgenden gelegentlich auch $\mathfrak{A}^{(0)}$ bzw. $\mathfrak{B}^{(0)}$ geschrieben.

Die Kurve $\mathfrak{B}$ heiße [1]) eine *„Asymptote von* $\mathfrak{A}$ *im weiteren Sinne"*, wenn zu jeder beliebig kleinen Entfernung δ ein (positiver) Wert $X_0(\delta)$ von x gehört, derart daß für alle, der Bedingung $\xi \geqq X_0(\delta)$ genügenden Punkte $(x = \xi, y = f(\xi))$ von $\mathfrak{A}$ der kürzeste Abstand von der Kurve $\mathfrak{B}$ stets kleiner bleibt als δ. Umgekehrt ist dann auch $\mathfrak{A}$ Asymptote von $\mathfrak{B}$ im weiteren Sinne.

Besondere Kategorien von Asymptoten im weiteren Sinne werden festgelegt durch die

Erklärung: $\mathfrak{B}$ *heißt „Asymptote" (schlechthin oder auch „im engeren Sinne")* *von* $\mathfrak{A}$, *wenn*

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - F(x)] = 0.$$

Nicht jede Asymptote von $\mathfrak{A}$ im weiteren Sinne ist auch Asymptote von $\mathfrak{A}$ im engeren Sinne. *Ist gleichzeitig* $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ *Asymptote von* $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ *für* $\nu = 0, 1, \ldots, n$, *so heißt* $\mathfrak{B}$ *eine „Asymptote n-ter Ordnung" von* $\mathfrak{A}$.

2. *Asymptotische Tangenten.*

Strebt die Tangente an die gegebene Kurve $\mathfrak{C}$ mit der Gleichung $y = f(x)$ einer Grenzlage zu, falls $x \to +\infty$ geht, so ist, wie bekannt [2]), diese Grenzlage eine Asymptote 1. Ordnung von $\mathfrak{C}$. Hinreichend für die Existenz dieser Grenzlage ist, daß die Grenzwerte

---

[1]) Vgl. H. v. Mangoldt, Anwendungen der Differential- und Integralrechnung auf Kurven und Flächen (Enzykl. Math. Wiss. III, D 12, Nr. 8).

[2]) Vgl. etwa E. Cesaro, Algebraische Analysis (Leipzig 1904, Nr. 598, S. 566).

$$\text{(1.)} \qquad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - x f'(x)] = h,$$

$$\text{(2.)} \qquad \lim_{x \to +\infty} f'(x) = g$$

existieren und endlich sind. Nicht bemerkt scheint bisher zu sein, daß die Existenz und Endlichkeit des Grenzwertes (2.) eine Folge von (1.) ist. Es gilt nämlich folgendes:

Geht die Abszisse x des Punktes $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{C}$ gegen $+\infty$, so strebt die Tangente der (einmal stetig differenzierbaren) Kurve $\mathfrak{C}$ im Punkte $\mathfrak{P}$ dann (und nur dann) einer bestimmten endlichen Grenzlage zu, wenn gleichzeitig der Schnittpunkt der genannten Tangente mit der y-Achse einer endlichen Grenzlage zustrebt. [*Die Grenzlage der Tangente ist eine Asymptote (mindestens) 1. Ordnung von $\mathfrak{C}$.*]

Zum Beweise setze man

$$\text{(1'.)} \qquad f(x) - x f'(x) = \varphi(x).$$

Die für $a \leqq x$ stetige Funktion $\varphi(x)$, durch welche die Ordinate des Schnittpunktes von Tangente und Ordinatenachse geliefert wird, ist also der Bedingung zu unterwerfen

$$\text{(1.)} \qquad \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = h.$$

Nimmt man für den Augenblick $\varphi(x)$ als gegeben an, so läßt sich (1'.) als lineare homogene Differentialgleichung für die (als stetig differenzierbar vorausgesetzte) Funktion $f(x)$ auffassen [1]). Aus (1'.) folgt daher

$$f(x) = x\left[c - \int_a^x \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2}\, d\tau\right], \qquad a \leqq x,$$

$$f'(x) = c - \int_a^x \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2}\, d\tau - \frac{\varphi(x)}{x}, \qquad a \leqq x.$$

Dabei ist c eine Integrationskonstante. Die Tangente an $\mathfrak{C}$ strebt (wegen (1.)) der Grenzlage $\mathfrak{T}$ zu

$$\text{(}\mathfrak{T}\text{)} \qquad y = g x + h,$$

wobei

$$g = c - \int_a^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2}\, d\tau.$$

[Und es gilt weiter (wegen $\lim_{x \to +\infty} \lim_{\xi \to +\infty} x \int_x^\xi \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2}\, d\tau = h$):

$$\lim [f(x) - (g x + h)] = 0,$$

$$\lim [f'(x) - g] = 0.$$

$\mathfrak{T}$ ist also Asymptote (mindestens) 1. Ordnung von $\mathfrak{C}$, w. z. b. w.]

---

[1]) Man vergleiche hierzu die Überlegungen bei *Perron*, Zur Theorie der divergenten Reihen (Math. Zeitschrift 6 (1920) S. 159), wo aus der Existenz von $\lim_{x \to +\infty} (y' + y)$ die Existenz von $\lim_{x \to +\infty} y'$ erschlossen wird; ferner *Perron*, Über nicht-homogene lineare Differentialgleichungen (ebenda, S. 161 ff.), wo eine Verallgemeinerung für Differentialgleichungen höherer Ordnung gegeben wird.

3. *Asymptotische Parabeln.*

Die soeben angegebene Tatsache ist der einfachste Fall eines allgemeineren Satzes, der nachstehend formuliert werden soll und dessen Bestehen geometrisch ebenfalls plausibel erscheint.

Die zur (n-mal stetig differenzierbaren) Funktion $y = f(x)$ gehörige Kurve $\mathfrak{C}$ besitzt in jedem Punkte $(x = \xi, y = f(\xi))$ die „*Schmiegungsparabel n-ter Ordnung* $\mathfrak{P}_n(\xi)$“ $(n \geqq 1)$

$$(3.) \qquad y = \varphi_n(x;\xi) = \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{(x-\xi)^\lambda}{\lambda!} f^{(\lambda)}(\xi) = \sum_{\mu=0}^{n} A_\mu(\xi)\, x^\mu.$$

Dabei ist

$$(4_\mu.) \qquad A_\mu(\xi) = \frac{(-1)^{n-\mu}}{\mu!\,(n-\mu)!} B_\mu(\xi),$$

$$(5_\mu.) \qquad B_\mu(\xi) = \xi^{n-\mu+1} \frac{d^{n-\mu}}{d\,\xi^{n-\mu}} \left[\frac{f^{(\mu)}(\xi)}{\xi}\right]. \qquad \mu = 0, 1, \ldots, n.$$

$\mathfrak{P}_1(\xi)$ liefert die Tangente in ξ. Die ν-te abgeleitete Kurve $\mathfrak{P}_n^{(\nu)}(\xi)$ der Schmiegungsparabel $\mathfrak{P}_n(\xi)$ ist die Schmiegungsparabel $(n-\nu)$-ter Ordnung von $\mathfrak{C}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$.

Erklärung. Geht ξ gegen $+\infty$, so strebt $\mathfrak{P}_n(\xi)$ einer endlichen Grenzlage zu dann und nur dann, wenn

$$\lim_{\xi \to +\infty} A_\mu(\xi) = C_\mu, \qquad \mu = 0, 1, \ldots, n,$$

existiert und endlich ist. Man schreibt dann

$$\lim_{\xi \to +\infty} \mathfrak{P}_n(\xi) = \Pi_n$$

und *nennt Π_n etwa die „Grenzparabel n-ter Ordnung“ von* $\mathfrak{C}$ und zwar auch in dem (noch zu erörternden) Falle, daß die C_μ $(\mu = 0, 1, \ldots, n)$ teilweise oder sämtlich den Wert Null besitzen. $\Pi_n^{(\nu)}$, d. h. also die ν-te Abgeleitete von Π_n, ist, dem oben Bemerkten zufolge, Grenzparabel $(n-\nu)$-ter Ordnung von $\mathfrak{C}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$.

Satz. Für die Existenz der Grenzparabel Π_n ist (notwendig und) hinreichend, daß der Schnittpunkt der Schmiegungsparabel $\mathfrak{P}_n(\xi)$ mit der y-Achse einer endlichen Grenzlage zustrebt, wenn ξ gegen $+\infty$ geht.

Beweis. Da die Ordinate des Schnittpunktes von $\mathfrak{P}_n(\xi)$ mit $x = 0$ den Wert $A_0(\xi)$ besitzt, so läßt sich der Satz auch so formulieren:

Die Existenz und Endlichkeit von $\lim_{\xi \to +\infty} A_0(\xi) = C_0$ *zieht immer die Existenz und Endlichkeit von* $\lim_{\xi \to +\infty} A_\mu(\xi) = C_\mu$ *nach sich* $(\mu = 1, 2, \ldots, n)$.

Denkt man sich für den Augenblick in $(5_\mu.)$ die stetige Funktion $B_\mu(\xi)$ gegeben, so liefern die Differentialgleichungen $(5_\mu.)$ in $f^{(\mu)}$ die Lösungen

$$(6_\mu.) \quad f^{(\mu)}(\xi) = \xi\left[\frac{1}{(n-\mu-1)!}\int_a^\xi (\xi-\tau)^{n-\mu-1} \frac{B_\mu(\tau)}{\tau^{n-\mu+1}}\, d\tau + \sum_{\lambda=0}^{n-\mu-1} \frac{1}{\lambda!} c_\lambda^{(\mu)} \xi^\lambda\right], \quad \mu = 0, \ldots, n-1,$$

$$(6n.) \qquad f^{(n)}(\xi) = B_n(\xi).$$

Der Satz ist also richtig, wenn die μ-te Ableitung $(\mu = 1, \ldots, n)$ einer Lösung der in $f(x)$ linearen Differentialgleichung

$$(D_0.) \qquad \frac{d^n}{d\,\xi^n}\left[\frac{f(\xi)}{\xi}\right] = \frac{B_0(\xi)}{\xi^{n+1}}$$

sich in der Form $(6_\mu.)$, $(\mu = 1, \ldots, n)$, darstellt und wenn für die hierbei auftretenden $B_\mu(\tau)$ die Grenzwerte $\lim\limits_{\tau \to +\infty} B_\mu(\tau)$ existieren und endlich sind, sobald das Gleiche für $B_0(\tau)$ zutrifft. Das ist nun tatsächlich der Fall, wie man leicht nachweist. Dabei ergeben sich, wenn

$$(\mathfrak{C}^*.) \quad f(x) = x\left[\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-\tau)^{n-1}\frac{B_0(\tau)}{\tau^{n+1}}\,d\tau + \sum_{\lambda=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda!}c_\lambda x^\lambda\right]$$

gesetzt wird, für die in (6.) auftretenden Funktionen $B_\mu(\tau)$ die Darstellungen

$$(7_\mu.) \quad B_\mu(\tau) = \frac{B_0(\tau)}{\tau^\mu} + \mu\left[(-1)^{n-\mu}(n-\mu)!\,c_{\mu-1} + \int_a^\tau \frac{B_0(\eta)}{\eta^{\mu+1}}\,d\eta\right], \qquad \mu = 1, \ldots, n.$$

Man sieht: Die Darstellung $(\mathfrak{C}^*.)$ liefert alle, aber auch nur diejenigen Kurven $\mathfrak{C}$, für welche die Grenzparabel n-ter Ordnung existiert, vorausgesetzt, daß für die im Bereiche $a \leqq \tau$ eindeutige und stetige (im übrigen beliebige) Funktion $B_0(\tau)$ der Grenzwert

$$(8.) \qquad \lim_{\tau \to +\infty} B_0(\tau) = h$$

existiert und endlich ist. Die c_ϱ bedeuten beliebige Konstante.

In der Gleichung

$$(\Pi_n.) \qquad y = \sum_{\lambda=0}^{n} C_\lambda x^\lambda$$

der Grenzparabel sind die Koeffizienten C_λ gegeben durch die Beziehungen

$$(9.) \quad C_0 = \frac{(-1)^n}{n!}h, \; C_\lambda = \frac{1}{(\lambda-1)!}\left[c_{\lambda-1} + \frac{(-1)^{n-\lambda}}{(n-\lambda)!}\int_a^{+\infty}\frac{B_0(\tau)}{\tau^{\lambda+1}}\,d\tau\right], \qquad \lambda = 1, \ldots, n;$$

und die rechterhand auftretenden Integrale haben wegen $\lambda \geqq 1$ und (8.) einen Sinn.

Zusatz: Ist $|B_0(\tau)| < M$ für alle $\tau\,(a \leqq \tau)$, ist also $B_0(\tau)$ beschränkt, so sind auch die $|A_\mu(\xi)|$ $(\mu = 1, \ldots, n)$ sämtlich beschränkt. Bei gegebenem $B_0(\tau)$ gibt es ein und nur ein Integral $f(x)$ von $(D_0.)$, für welches $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ endlich ist. Dieses Integral ist charakterisiert durch $C_\lambda = 0$, $\lambda = 1, \ldots, n$.

Man betrachte nun allgemein den Fall, daß $C_k \neq 0$, $C_\nu = 0$, $(\nu = k+1, \ldots, n;$ $k \leqq n)$. Dann ist Π_n eine Parabel k-ten Grades und es gilt

$$c_\sigma = \frac{(-1)^{n-\sigma}}{(n-\sigma-1)!}\int_a^{+\infty}\frac{B_0(\tau)}{\tau^{\sigma+2}}\,d\tau, \qquad \sigma = k, k+1, \ldots, n-1.$$

Es existieren gleichzeitig mit Π_n auch die Grenzparabeln $\Pi_k, \Pi_{k+1}, \ldots, \Pi_{n-1}$ und sie alle sind mit Π_n identisch.

Umgekehrt muß $C_\nu = 0$ sein $(\nu = k+1, \ldots, n)$, wenn außer Π_n auch noch Π_k $(k \leqq n-1)$ existiert. Überdies ist in diesem Falle Π_k eine Asymptote (mindestens) n-ter Ordnung von $\mathfrak{C}$. Um letzteres einzusehen, zeigt man etwa unter Benutzung von $(\mathfrak{C}^*.)$, (8.) und (9.) zunächst, daß Π_n eine Asymptote im engeren Sinne von $\mathfrak{C}$ ist. Da $\Pi_n^{(\nu)}$ Grenzparabel $(n-\nu)$-ter Ordnung von $\mathfrak{C}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ ist, muß auch $\Pi_n^{(\nu)}$ Asymptote von $\mathfrak{C}^{(\nu)}$ sein.

Man hat somit den

Satz: Unter den mit der gegebenen Funktion $y = f(x)$ *gebildeten Ausdrücken*

$$x^{\varrho+1} \frac{d^\varrho}{d\,x^\varrho}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = B_0(x;\varrho), \qquad \varrho = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

gehöre $B_0(x;n_1)$ *bezw.* $B_0(x;n_2)$ *zum kleinsten bzw. größten Index* $\varrho = n_1$, *bezw.* $\varrho = n_2$, *für welchen* $\{f^{(\varrho)}(x)$ $(a \leqq x)$ *als stetig vorausgesetzt\}*

$$\lim_{x \to +\infty} B_0(x;n)$$

existiert und endlich ist $(0 \leqq n_1 \leqq n_2)$. *Dann existieren die Grenzparabeln* Π_{n_1}, $\Pi_{n_1+1}, \ldots, \Pi_{n_2}$ *von* $\mathfrak{C}$. *Sie alle sind miteinander identisch, vom Grade* n_1 *und Asymptoten der Ordnung* n_2 *von* $\mathfrak{C}$.

An Hand der Beziehungen (9.) konstatiert man, daß jedem beliebig vorgegebenen Zahlenpaare n_1, n_2 $(0 \leqq n_1 \leqq n_2)$ wirklich auch (mindestens) eine Funktion $f(x)$ bzw. eine Kurve $\mathfrak{C}$ von der im Satze gekennzeichneten Art entspricht. Schließlich läßt sich z. B. eine Kurve $\mathfrak{C}$ angeben, für welche die Grenzparabeln jeder noch so hohen Ordnung gleichzeitig existieren.

Übrigens sind die Begriffe „Grenzparabel" und „Asymptote n-ter Ordnung" nicht identisch.

Die obigen Betrachtungen übertragen sich sämtlich auf Kurven im gewöhnlichen Raume beliebiger Dimension.

Auf entsprechende Fragestellungen für krumme Oberflächen soll hier nur hingewiesen werden, ebenso auf den Zusammenhang der obigen Erörterungen mit gewissen Problemen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen [1]).

[1]) Vgl. die Zitate auf S. 2, Anm. 1.

Über die *Salmon*schen Tangenten einer algebraischen Fläche.

Von *Heinrich W. E. Jung* in Halle a. d. Saale.

1. Einleitung.

Die Inflexionstangenten einer algebraischen Fläche F haben mit F im Berührungspunkte im allgemeinen drei zusammenfallende Schnittpunkte. Es gibt aber auch Inflexionstangenten, die mehr als drei Schnittpunkte im Berührungspunkte mit F haben. Diese wollen wir *Salmon*sche Tangenten nennen. Ihre Berührungspunkte bilden eine Kurve $\mathfrak{S}$ auf F, die die *Salmon*sche *Kurve* heißen soll. In dieser Arbeit sollen folgende beiden Anzahlen bestimmt werden:

1. Die Zahl n_1 der Stellen von F, wo beide Inflexionstangenten *Salmon*sche sind.

2. Die Zahl n_2 der durch eine beliebige Gerade gehenden *Salmon*schen Tangenten.

Wir setzen dabei voraus, daß F keine geradlinige Fläche ist.

Diese Zahlen sind schon früher bestimmt, aber unter der Voraussetzung, daß F eine allgemeine Ordnungsfläche ist [1]). Hier wird über F nur vorausgesetzt, daß die gesuchten Zahlen endlich sind. Auch von dieser Einschränkung werden wir uns in gewissem Sinne am Schlusse der Arbeit frei machen. Die Werte für n_1 und n_2 lassen sich in mannigfacher Form darstellen. Z. B. ergibt sich:

Es sei p_a das arithmetische Geschlecht von F, p und p' seien die Geschlechte eines ebenen Schnittes und eines Berührungskegels ohne besondere Lage; Z sei die *Zeuthen-Segre*sche Invariante, n sei die Ordnung und n' die Klasse von F. Schließlich sei a die Klasse eines allgemeinen ebenen Schnittes oder, was dasselbe ist, die Ordnung eines allgemeinen Berührungskegels. Dann ist

$$n_1 = 72\,(p_a + 1) + 28\,(p + p' - 2) + 3\,(Z + 4) - 8\,(n + n') + 12\,a,$$
$$n_2 = 36\,(p_a + 1) + 11\,(p + p' - 2) - 9\,(Z + 4) - 2\,(n + n') + 7\,a.$$

Aus diesen Formeln geht hervor, daß die Zahlen n_1 und n_2, wie es ihrer geometrischen Bedeutung nach sein muß, zu sich selbst dual sind. Andere Formeln für n_1 und n_2 findet man in Nr. 14, Seite 21 ff.

---

[1]) *Salmon-Fiedler*, Analyt. Geom. des Raumes II (3. Aufl.) S. 635 und 640. *A. Clebsch*, Zur Theorie der algebraischen Flächen, dieses Journ. Bd. 63 (1864) p. 14—26. Der Wert für n_1 ist hier falsch angegeben. *H. Schubert*, Tangentensingularitäten der allgemeinen Ordnungsflächen, Math. Ann. 11 (1877) p. 347—378.

2. Die Fläche *F*.

Die Fläche F sei von der n-ten Ordnung und der n'-ten Klasse. Ihre Gleichung in Punktkoordinaten sei

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0. \tag{1.}$$

Für die Umgebung einer jeden Stelle von F können wir setzen

$$x_a = \mathfrak{A}_a(u, v), \tag{2.}$$

wo die $\mathfrak{A}_a$ gewöhnliche Potenzreihen von u, v sind, die nicht sämtlich für $u = v = 0$ verschwinden. Da es nur auf die Verhältnisse der x_a ankommt, so können wir mit einem $\mathfrak{A}_a$, das nicht für $u = v = 0$ Null wird, dividieren, d. h. wir können immer ein $\mathfrak{A}_a$ gleich 1 annehmen. Die Ebenenkoordinaten von F bezeichnen wir mit x'_a. Es wird für die Umgebung einer Stelle von F

$$x'_a = \mathfrak{A}'_a(u, v), \tag{3.}$$

wo auch die $\mathfrak{A}'_a$ gewöhnliche Potenzreihen von u, v sind. Es läßt sich immer so einrichten, daß auch die $\mathfrak{A}'_a$ an keiner Stelle alle gleichzeitig verschwinden, sodaß jede Stelle von F eine ganz bestimmte Berührungsebene hat.

Wir verwenden im folgenden die Bezeichnungen und Formeln meiner Arbeit: Über die Differentialinvarianten algebraischer Flächen, Math. Zeitschr. 8 (1920), p. 182—221. Ich zitiere sie mit D.

Die Kurven von F werden in der Umgebung jeder Stelle von F, durch die sie gehen, durch eine Gleichung zwischen den Hilfsgrößen u, v gegeben, mit denen wir die Koordinaten x_a darstellen. Ist $\mathfrak{G}$ eine Kurve von F, so bezeichnen wir mit $\overline{\mathfrak{G}}$ die abwickelbare Fläche, die F längs $\mathfrak{G}$ umschrieben ist. Die Gleichung, die $\mathfrak{G}$ in der Umgebung einer Stelle definiert, schreiben wir $\mathfrak{G}(u, v) = 0$ oder kurz $\mathfrak{G} = 0$ und nennen $\mathfrak{G}(u, v)$ die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{G}$ für die Stelle. Unter den Kurven seien folgende hervorgehoben:

a) Die ebenen Schnitte sind gegeben durch

$$\mathfrak{A} \equiv c_1 \mathfrak{A}_1 + c_2 \mathfrak{A}_2 + c_3 \mathfrak{A}_3 + c_4 \mathfrak{A}_4 = 0;$$

b) Die Berührungskurven der Berührungskegel haben die Gleichung

$$\mathfrak{A}' \equiv c'_1 \mathfrak{A}'_1 + c'_2 \mathfrak{A}'_2 + c'_3 \mathfrak{A}'_3 + c'_4 \mathfrak{A}'_4 = 0;$$

Diese Kurven nennen wir kurz Berührungskurven. Die abwickelbare Fläche $\overline{\mathfrak{A}'}$ ist der Berührungskegel.

c) Es sei $\mathfrak{V}$ eine Kurve derart, daß für $\mathfrak{V} = 0$ die Verhältnisse der x_a konstant werden. Es entspricht dann $\mathfrak{V}$ auf F nur ein Punkt P. Wir nennen $\mathfrak{V}$ eine *in einen Punkt kondensierte Kurve* oder eine *Punktkurve*. Im allgemeinen ist dann P ein isolierter singulärer Punkt von F und $\overline{\mathfrak{V}}$ ist der Berührungskegel von F in P.

d) Es sei $\mathfrak{V}'$ eine Kurve derart, daß für $\mathfrak{V}' = 0$ die Verhältnisse der x'_a konstant werden. Dann ist die abwickelbare Fläche $\overline{\mathfrak{V}'}$ eine Ebene. Diese Ebene berührt also F längs der Kurve $\mathfrak{V}'$. Wir nennen $\mathfrak{V}'$ eine *in eine Ebene kondensierte Kurve* [eigentlich ist die Fläche $\overline{\mathfrak{V}'}$ in eine Ebene kondensiert] oder eine *Ebenenkurve*. An andrer Stelle habe ich diese Kurven ebene Berührungskurven genannt; aber diese Bezeichnung kann zu Mißverständnissen führen, da ja eine Berührungskurve eben sein kann, ohne in dem hier gemeinten Sinne eine ebene Berührungskurve zu sein. Die Punkt- und Ebenen-Kurven entsprechen einander dual. Es gilt der Satz, daß die Punktkurven alle in der Rückkehrkurve $\mathfrak{R}$ und die Ebenen-

kurven in der parabolischen oder Wendekurve $\mathfrak{R}'$ enthalten sind. Um das zu beweisen, sei $\mathfrak{V}$ eine in den Punkt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ kondensierte Kurve. Dann ist für eine Stelle S, durch die $\mathfrak{V}$ geht,

(4.) $$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{V}^\alpha a_1,\ \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{V}^\alpha a_2,\ \mathfrak{A}_3 = \mathfrak{V}^\alpha a_3,\ \mathfrak{A}_4 = 1,\ \alpha > 0,$$

wo die a_α gewöhnliche Potenzreihen von u, v sind. Aus (5.) in D. S. 184 ergibt sich, daß für $\mathfrak{V} = 0$ die $\mathfrak{Z}_\alpha$ sämtlich verschwinden, sodaß $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{R}$ enthalten sein muß. Dual entsprechend folgt der zweite Teil unserer Behauptung.

e) Es kann auf F Kurven geben, längs deren die *Gauß*schen Fundamentalgrößen zweiter Ordnung L, M, N alle drei verschwinden, Wir bezeichnen den größten gemeinsamen Teiler von L, M, N mit $\mathfrak{S}_1$.

f) Es sei g eine Gerade. Die Berührungspunkte derjenigen Inflexionstangenten von F, die durch g gehen, bilden eine Kurve $\mathfrak{J}$, die ich eine Tangentenkurve nenne. Sie ist abhängig von der Wahl der Geraden g. Aber es kann eine Kurve $\mathfrak{W}$ auf F geben, die in allen Tangentenkurven enthalten ist.

Ist S eine Stelle, durch die $\mathfrak{S}_1$ oder $\mathfrak{W}$ geht, so ist dort, wegen der Definition von $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{W}$, jede Tangente Inflexionstangente in dem Sinne, daß in S jede Tangente mit F mindestens drei zusammenfallende Schnittpunkte gemeinsam hat. Es gibt dann in S mindestens zwei Tangenten, die freilich zusammenfallen können, die mit F in S mindestens vier zusammenfallende Schnittpunkte haben, also *Salmon*sch sind. Jede solche Stelle würde also unter die n_1 Stellen zu rechnen sein, wo beide Inflexionstangenten *Salmon*sch sind. Wir nehmen daher an, daß $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{W} = 1$ ist, d. h. daß die Kurven $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{W}$ auf F nicht vorhanden sind.

3. Vereinfachende Annahmen.

Wir machen folgende Annahmen über F, die im wesentlichen darauf hinauskommen, daß die zu bestimmenden Zahlen n_1 und n_2 endlich sind.

I. Es soll $\mathfrak{W} = \mathfrak{S}_1 = 1$ sein.

II. Es sollen an keiner Stelle L, M, N gleichzeitig Null sein.

III. Es sollen nicht längs einer Kurve beide Inflexionstangenten *Salmon*sch sein.

IV. Es soll die gegebene Gerade g keine besondere Lage haben.

Aus diesen Annahmen folgt, wie wir gleich beweisen werden:

1. Ist $\mathfrak{V}$ eine in den Punkt P kondensierte Kurve, so ist ein durch P gehender ebener Schnitt $\mathfrak{A}$, solange er keine besondere Lage hat, nur durch die erste Potenz von $\mathfrak{V}$ teilbar.

2. Ist $\mathfrak{V}'$ eine in die Ebene E kondensierte Kurve, so ist die Berührungskurve $\mathfrak{A}'$ eines Kegels, dessen Spitze in E liegt, nur durch die erste Potenz von $\mathfrak{V}'$ teilbar, solange die Spitze keine besondere Lage hat.

3. Die Rückkehrkurve $\mathfrak{R}$ und die Wendekurve $\mathfrak{R}'$ haben keine Kurve gemeinsam.

4. Es sind keine Kurven vorhanden, die gleichzeitig in einen Punkt und eine Ebene kondensiert sind.

Diese Folgerungen ergeben sich auf folgende Weise. Zunächst können wir, wenn nötig, durch eine lineare homogene Transformation der Hilfsgrößen u, v

$$u = a u' + b v',\ v = c u' + d v',\ a d - b c \neq 0,$$

erreichen, daß an der gerade betrachteten Stelle S die Größe N nicht Null wird.

Denn durch die angegebene Transformation geht N über in [D. S. 188 (5.)]

$$N' = L\,b^2 + 2\,M\,b\,d + N\,d^2.$$

Da nach II. L, M, N in S nicht gleichzeitig verschwinden, so können wir b und d immer so wählen, daß N' an der Stelle S eine Einheit ist. Wir nehmen also von vornherein an, daß N eine Einheit ist.

Nach D. S. 194 (25.) ist

(5.) $$\mathfrak{R}'\,Y^2 - \mathfrak{R}\,Y'^2 = N\,\mathfrak{J},$$

wo $Y, Y', \mathfrak{J}$ in bezug auf die gegebene Gerade g gebildet sein sollen. Hieraus ergibt sich, daß ein gemeinsamer Teiler von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ in $\mathfrak{J}$ enthalten sein muß. Da dieser aber unabhängig von der Geraden g ist, so würde er in $\mathfrak{W}$ enthalten sein, was wegen I. nicht möglich ist. Damit ist (3.) bewiesen. Da eine Punktkurve immer in $\mathfrak{R}$ und eine Ebenenkurve in $\mathfrak{R}'$ enthalten ist, so würde eine Kurve, die gleichzeitig Punkt- und Ebenen-Kurve ist, gemeinsamer Teiler von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ sein, was nach dem eben bewiesenen nicht möglich ist. Damit ist (4.) bewiesen.

Es sei $\mathfrak{V}$ eine Punktkurve. Sie sei kondensiert in den Punkt $y_1 = y_2 = y_3 = 0$. Es sei S eine Stelle, durch die $\mathfrak{V}$ geht. Dann gilt für die Umgebung von S für die $\mathfrak{A}_a$ die Darstellung (4.). Aus D. S. 191 (7.), (9.) folgt

$$Y = \alpha\,\mathfrak{V}^{\alpha-1}\frac{\partial\,\mathfrak{V}}{\partial\,v}\quad(p_{41}\,a_1 + p_{42}\,a_2 + p_{43}\,a_3) + (\alpha),$$

wo unter (α) Glieder zu verstehen sind, die mindestens durch $\mathfrak{V}^\alpha$ teilbar sind. Daher ist Y für $\alpha > 1$ durch $\mathfrak{V}$ teilbar. Da $\mathfrak{V}$ als Punktkurve in $\mathfrak{R}$ enthalten ist, so folgt aus (5.), daß $\mathfrak{V}$ für $\alpha > 1$ in $\mathfrak{J}$, also in $\mathfrak{W}$ enthalten ist, was nach I. nicht sein kann. Daher ist $\alpha = 1$. Damit ist (1.) bewiesen. Die Folgerung (2.) ergibt sich dual entsprechend.

4. Die zu benutzenden Gleichungen.

Zur Bestimmung der beiden Zahlen n_1, n_2 benutzen wir folgende Gleichungen:

(6.) $$N^3\,Q_3(1,\lambda)\,Q_3(1,\mu) = \mathfrak{S},$$

(7.) $$(Y\sqrt{\mathfrak{R}'} + Y'\sqrt{\mathfrak{R}})\,(Y\sqrt{\mathfrak{R}'} - Y'\sqrt{\mathfrak{R}}) = N\,\mathfrak{J},$$

(8.) $$Q_3(1,\lambda)\,(Y\sqrt{\mathfrak{R}'} + Y'\sqrt{\mathfrak{R}})^3 + Q_3(1,\mu)\,(Y\sqrt{\mathfrak{R}'} - Y'\sqrt{\mathfrak{R}})^3 = 2\,\mathfrak{U}_0\sqrt{\mathfrak{R}'}.$$

Die erste dieser Gleichungen folgt aus D. S. 201 (6.) und S. 202 (18.). Die zweite ist die schon angegebene Gleichung (5.). Die dritte folgt aus D. S. 210 (8.) in Verbindung mit S. 211 (14.). Die Größen $Y, Y', \mathfrak{J}$ sollen natürlich in bezug auf die gegebene Gerade g gebildet sein.

Die Größen λ, μ sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

(9.) $$Q_2(1,\zeta) = L + 2\,M\,\zeta + N\,\zeta^2 = 0.$$

Es bestimmen also λ und μ die beiden Inflexionstangenten an der gerade betrachteten Stelle. Wir bezeichnen sie kurz mit (λ) und (μ). Wenn an einer Stelle $Q_3(1,\lambda)$ Null ist, so ist (λ), und wenn $Q_3(1,\mu)$ Null ist, so ist (μ) eine *Salmon*sche Tangente. [D. Kap. VI]. Die n_1 Stellen, wo beide Inflexionstangenten *Salmon*sche sind, sind also dadurch charakterisiert, daß in ihnen $Q_3(1,\lambda) = Q_3(1,\mu) = 0$.

Nach D. S. 192 (11.) ist $X\,\xi + Y\,\eta = 0$ die Bedingung dafür, daß die Tangente $(\xi\eta)$ durch g geht. Soll also (λ) durch g gehen, so muß sein

(10.) $$X + Y\,\lambda = 0,$$

da die Tangente λ durch $\eta - \lambda\,\xi = 0$ definiert ist. Es ist aber nach D. S. 201 (8.) die Gleichung (10.) gleichwertig mit

$$\alpha\, X + \beta\, Y = 0$$

und diese Gleichung nach D. S. 210 (5.) mit

(11.) $$Y\sqrt{\mathfrak{R}'} - Y'\sqrt{\mathfrak{R}} = 0.$$

Es besteht also (11.), wenn (λ) durch g geht, und analog ist

(12.) $$Y\sqrt{\mathfrak{R}'} + Y'\sqrt{\mathfrak{R}} = 0$$

die Bedingung dafür, daß (μ) durch g geht.

5. Gleichung für die Zahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{U}_0\sqrt{\mathfrak{R}'}$.

Es sei S eine Stelle, durch die $\mathfrak{S}$ geht. Es sei die zugeordnete Funktion $\mathfrak{S}(u, v)$ von $\mathfrak{S}$ für die Stelle S als ganze rationale Funktion von v angenommen, bei der der Koeffizient der höchsten Potenz gleich 1 ist. Die Wurzeln von $\mathfrak{S}(u, v) = 0$ seien $v_1, v_2, \ldots$. Es schreite $v_\varkappa$ nach ganzen steigenden Potenzen von $u^{\frac{1}{a_\varkappa}}$ fort. Das Vorzeichen von $\sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'}$ sei so gewählt, daß für $v = v_\varkappa$ $Q_3(1, \lambda)$ identisch verschwindet. Es wird dann $Q_3(1, \mu)$ für $v = v_\varkappa$ nicht identisch Null. Denn sonst wären längs der durch $v = v_\varkappa$ definierten Kurve beide Inflexionstangenten (λ), (μ) *Salmon*sch entgegen Annahme III. Es kann ferner $Y\sqrt{\mathfrak{R}'} - Y'\sqrt{\mathfrak{R}}$ nicht für $v = v_\varkappa$ identisch verschwinden. Denn sonst wäre nach (7.) die durch $v = v_\varkappa$ definierte, von der Geraden g unabhängige, Kurve in $\mathfrak{J}$, also in $\mathfrak{W}$ enthalten, was der Annahme I. widerspricht.

Für $v = v_\varkappa$ mögen

(13.) $$Q_3(1, \mu),\quad Y\sqrt{\mathfrak{R}'} - Y'\sqrt{\mathfrak{R}},\quad \mathfrak{U}_0,\quad \mathfrak{R}'$$

durch die

(14.) $$q_\varkappa\text{-},\qquad y_\varkappa\text{-},\qquad u_\varkappa\text{-},\quad \varrho'_\varkappa\text{-te}$$

Potenz von $u^{\frac{1}{a_\varkappa}}$ teilbar werden. Dann folgt aus (8.), da $Q_3(1, \lambda)$ identisch Null wird, für $v = v_\varkappa$

(15.) $$q_\varkappa + 3\,y_\varkappa = u_\varkappa + \tfrac{1}{2}\,\varrho'_\varkappa.$$

Summieren wir über die Wurzeln v_i von $\mathfrak{S}(u, v) = 0$, so ist

(16.) $\Sigma\, u_\varkappa = (\mathfrak{S}, \mathfrak{U}_0)_S =$ Zahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{U}_0$ in S,

(17.) $\Sigma\, \varrho'_\varkappa = (\mathfrak{S}, \mathfrak{R}')_S =$ Zahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{R}'$ in S.

Wir setzen ferner

(18.) $$\Sigma\, q_\varkappa = q_S,\ \Sigma\, y_\varkappa = y_S.$$

Dann folgt aus (15.)

(19.) $$q_S + 3\,y_S = (\mathfrak{S}, \mathfrak{U}_0)_S + \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{S}, \mathfrak{R}')_S.$$

Summieren wir über alle Stellen S von F, so folgt, wenn wir

(20.) $$\Sigma\, q_S = q,\ \Sigma\, y_S = y$$

setzen,

(21.) $$q + 3\,y = (\mathfrak{S}, \mathfrak{U}_0) + \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{S}, \mathfrak{R}').$$

6. Bedeutung von q.

Eine Stelle S wird zu q dann und nur dann einen Beitrag liefern, wenn in S sowohl $Q_3(1, \lambda)$ wie auch $Q_3(1, \mu)$ verschwinden, wenn also in S beide Tangenten

*Salmon*sch sind. Der einfachste Fall ist der, daß beide Inflexionstangenten vier zusammenfallende Schnittpunkte in S mit F haben, im übrigen aber keine Besonderheiten vorhanden sind. Wir betrachten diesen Fall genauer, um den Beitrag einer solchen Stelle zu q zu bestimmen. Es sei die xy-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems die Berührungsebene von F in S; die Geraden $x = y$, $z = 0$ und $x = -y$, $z = 0$ seien die Inflexionstangenten. Dann ist für die Umgebung von S die Fläche F gegeben durch eine Gleichung der Form

$$z = y^2 - x^2 + f(x, y),$$

wo f eine gewöhnliche Potenzreihe von x, y ist, die mit Gliedern dritter Dimension beginnt. Wenn die Inflexionstangenten *Salmon*sche sein sollen, so müssen in f die Glieder dritter Dimension durch $y^2 - x^2$ teilbar sein. Wir können setzen

$$f(x, y) = (y^2 - x^2)\, x + h.$$

Es sei ferner

(22.) $h = {}_2^1{}_4 (a x^4 + 4 b x^3 y + 6 c x^2 y^2 + 4 d x y^3 + e y^4) + (5).$

Wir setzen

(23.) $x = u,\ y = v,\ \frac{x_1}{x_4} = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_4} = x,\ \frac{x_2}{x_4} = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_4} = y,\ \frac{x_3}{x_4} = \frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_4} = z,\ \mathfrak{A}_4 = 1.$

Dann haben wir in der Umgebung von S

(24.) $\mathfrak{A}_1 = u,\ \mathfrak{A}_2 = v,\ \mathfrak{A}_3 = v^2 - u^2 + (v^2 - u^2)\, u + h,\ \mathfrak{A}_4 = 1.$

Daraus folgt nach D I und IV, wenn wir die Ableitungen nach u und v durch die Indizes 1 und 2 bezeichnen,

(25.) $\mathfrak{R} = 1,\ L = -2 - 6u + h_{11},\ M = 2v + h_{12},\ N = 2 + 2u + h_{22}.$

Es ergibt sich ferner $\mathfrak{A}_3' = 1$, sodaß $\partial \mathfrak{A}_3'/\partial u = \partial \mathfrak{A}_3'/\partial v = 0$. Da von den zweiten Ableitungen der $\mathfrak{A}_i$ nur die von $\mathfrak{A}_3$ von Null verschieden sind, so ist nach D. S. 196 (5.) hier

(26.) $$A = \frac{\partial L}{\partial u},\ B = \frac{\partial L}{\partial v},\ C = \frac{\partial N}{\partial u},\ D = \frac{\partial N}{\partial v},$$

also

$$A = -6 + a u + b v + (2),\quad B = b u + c v + (2),$$
$$C = 2 + c u + d v + (2),\quad D = d u + e v + (2).$$

Aus der quadratischen Gleichung (9.) folgt

$$\lambda = 1 + u - v + (2),\quad \mu = -1 - u - v + (2).$$

Nach D. S. 196 (6.) ist

(27.) $$\begin{cases} Q_3(1, \lambda) = A + 3B\lambda + 3C\lambda^2 + D\lambda^3, \\ Q_3(1, \mu) = A + 3B\mu + 3C\mu^2 + D\mu^3, \end{cases}$$

sodaß hier

(28.) $Q_3(1, \lambda) = \alpha u + \beta v + (2),\quad Q_3(1, \mu) = \gamma u + \delta v + (2),$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

(29.) $$\begin{cases} \alpha = a + 3b + 3c + d + 12, & \beta = b + 3c + 3d + e - 12; \\ \gamma = a - 3b + 3c - d + 12, & \delta = b - 3c + 3d - e + 12. \end{cases}$$

Folglich wird wegen (6.) und (28.)

(30.) $$\mathfrak{S} = N^3 (\alpha u + \beta v + \cdots)(\gamma u + \delta v + \cdots),$$

wo nach (25.) N eine Einheit ist. Es hat daher $\mathfrak{S}(u, v) = 0$ zwei Wurzeln

$$v_1 = -\frac{\alpha}{\beta} u + \cdots,\quad v_2 = -\frac{\gamma}{\delta} u + \cdots,$$

sodaß $\mathfrak{S}$ in S einen Doppelpunkt mit wegen (29.) im allgemeinen getrennten Tangenten hat. Für $v = v_1$ wird $Q_3(1, \lambda)$ identisch Null und $Q_3(1, \mu)$ wird durch die erste Potenz von u teilbar. Für $v = v_2$ ist's umgekehrt. Daher ist $q_1 = q_2 = 1$ und

$$qs = q_1 + q_2 = 2.$$

Im einfachsten Falle liefert also eine Stelle, wo beide Inflexionstangenten *Salmon*sche sind, zu q den Beitrag 2. Wir wollen daher eine Stelle, wo beide Inflexionstangenten *Salmon*sch sind, so oft zu n_1 rechnen, wie ihr Beitrag zu $\frac{1}{2} q$ angibt.

Es ist aber noch der Fall zu berücksichtigen, wo beide Inflexionstangenten zusammenfallen und *Salmon*sch sind. Das tritt an den Stellen ein, wo $\mathfrak{S}$ die Kurven $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ schneidet. Wir wollen diese Stellen, wenn nicht weitere Besonderheiten eintreten, *nicht* mit zu den n_1 Stellen rechnen, wo beide Inflexionstangenten *Salmon*sch sind. Der einfachste Fall dieser Art ist folgender. Dabei beschränken wir uns auf die Betrachtung einer Stelle, wo $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{R}'$ sich treffen. Der Fall, wo $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{R}$ sich treffen, ist dual zu dem andern. Nehmen wir wieder die Stelle S als Nullpunkt eines kartesischen Koordinatensystems, die xy-Ebene als Berührungsebene und die x-Achse als die zusammenfallenden Inflexionstangenten, so können wir als Gleichung von F nehmen

$$z = y^2 + xy(x + y) + h,$$

wo h wieder durch (22.) gegeben sei. Benutzen wir wieder die Gleichungen (23.), so haben wir

(31.) $\quad \mathfrak{A}_1 = u,\ \mathfrak{A}_2 = v,\ \mathfrak{A}_3 = v^2 + uv(u + v) + h,\ \mathfrak{A}_4 = 1.$

Hieraus folgt nach D I und IV

(32.) $\quad \mathfrak{R} = 1,\ L = 2v + h_{11},\ M = 2u + 2v + h_{12},\ N = 2 + 2u + h_{22}.$

Es gelten hier wieder die Gleichungen (26.), sodaß

(33.) $\quad A = au + bv + (2),\ B = 2 + bu + cv + (2),$
$\quad C = 2 + cu + dv + (2),\ D = du + ev + (2).$

Es wird ferner [D. S. 190 (18.)]

(34.) $\quad \mathfrak{R}\mathfrak{R}' = M^2 - LN = -4v + (4 - a)u^2 + \cdots,$
$\quad \lambda = -u - v + (2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'}\,\{1 - u + (2)\},$

(35.) $\quad Q_3(1, \lambda) = (a - 6)u + (b - 7)v + (2) + 3\sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'}\,\{1 + (1)\}.$

Da $Q_3(1, \mu)$ sich von $Q_3(1, \lambda)$ nur durch das Vorzeichen von $\sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'}$ unterscheidet, so wird wegen (6.), (34.), (35.)

(36.) $\quad \mathfrak{S} = N^3\{36v - a(a - 3)u^2 + \cdots\}.$

Die Gleichung $\mathfrak{S}(u, v) = 0$ hat also, da N nach (32.) wieder eine Einheit ist, eine Wurzel

$$v_1 = e_0 u^2 + \cdots,$$

wo e_0 von Null verschieden ist. Es geht ein Zweig von $\mathfrak{S}$ durch S, der die Inflexionstangente zur Tangente hat. Bei passender Wahl des Vorzeichens von $\sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'}$ wird $Q_3(1, \lambda)$ für $v = v_1$ identisch Null. Es wird dann $Q_3(1, \mu)$ für $v = v_1$ durch dieselbe Potenz von u teilbar wie

$$Q_3(1, \lambda) + Q_3(1, \mu) = 2(a - 6)u + 2(b - 7)v + (2),$$

also durch die erste. Es liefert daher S zu q den Beitrag 1.

Es war $\mathfrak{R}\mathfrak{R}' = -4v + (2)$, sodaß $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ für $v = v_1$ durch u^2 teilbar wird. Es liefert daher S zu der Zahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{S}$ den Beitrag 2.

Also liefert S zu

$$q - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{S}, \mathfrak{R}\,\mathfrak{R}')$$

keinen Beitrag. Das gilt auch, wenn S eine Schnittstelle von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{R}$ ist. Um das zu zeigen, braucht man in den angestellten Betrachtungen nur die $\mathfrak{A}_i$ durch die $\mathfrak{A}_i'$ zu ersetzen, wodurch $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ vertauscht werden, während L, M, N, $\mathfrak{S}$ als zu sich selbst dual ungeändert bleiben. Setzen wir daher

$$2\,n_1 = q - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{S}, \mathfrak{R}\,\mathfrak{R}'), \tag{37.}$$

so liefern die Stellen, wo beide Inflexionstangenten von einander verschieden und *Salmon*sch sind, den Beitrag 1 zu n_1, während die Stellen, wo die Inflexionstangenten zusammenfallen und *Salmon*sch sind keinen Beitrag zu n_1 liefern. Das gilt in den einfachsten Fällen. In jedem Fall ist durch (37.) festgesetzt, wie oft eine Stelle, wo $Q_3(1, \lambda)$ und $Q_3(1, \mu)$ beide Null werden, unter die n_1 Stellen zu rechnen ist.

7. Bedeutung von y.

Zu y liefern einen Beitrag die Stellen, wo $Q_3(1, \lambda)$ und $Y\sqrt{\mathfrak{R}'} - Y'\sqrt{\mathfrak{R}}$ gleichzeitig Null sind, also die Stellen, deren *Salmon*sche Tangente (λ) durch die Gerade g geht. Im einfachsten Falle liefert eine solche Stelle den Beitrag 1 zu y. Denn an einer solchen Stelle sind i. a. $Q_3(1, \mu)$ und $Y\sqrt{\mathfrak{R}'} + Y'\sqrt{\mathfrak{R}}$ nicht Null, sodaß wegen (6.) und (7.) der Beitrag der Stelle zu y gleich der Zahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{J}$ an der Stelle ist. Es geht aber durch eine reguläre Stelle von $\mathfrak{S}$ nur ein Zweig von $\mathfrak{S}$ und, wenn $\mathfrak{J}$ durch die Stelle geht, auch nur ein Zweig von $\mathfrak{J}$, und die Zweige von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{S}$ berühren sich nicht bei nicht besonderer Lage der Geraden g. Wir rechnen jede *Salmon*sche Inflexionstangente, die durch g geht, so oft zu n_2, wie ihr Beitrag zu y angibt. Es ist dann

$$n_2 = y. \tag{38.}$$

8. Eine Gleichung zwischen n_1 und n_2.

Aus (21.), (37.), (38.) folgt als erste Gleichung zwischen n_1 und n_2

$$2\,n_1 + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{S}, \mathfrak{R}\,\mathfrak{R}') + 3\,n_2 = (\mathfrak{S}, \mathfrak{U}_0) + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{S}, \mathfrak{R}')$$

oder

$$2\,n_1 + 3\,n_2 = (\mathfrak{U}_0, \mathfrak{S}) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{S}, \mathfrak{R}). \tag{39.}$$

9. Gleichung für $(\mathfrak{J}, \mathfrak{U}_0) + \frac{1}{2}(\mathfrak{J}, \mathfrak{R}')$.

Es seien $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots$ die Lösungen von $\mathfrak{J}(u, \varphi) = 0$ in der Umgebung einer Stelle S, durch die $\mathfrak{J}$ geht. Es schreite $\varphi^{(\varkappa)}$ nach ganzen steigenden Potenzen von $u^{\frac{1}{\beta_\varkappa}}$ fort. Es werde $Y\sqrt{\mathfrak{R}'} - Y'\sqrt{\mathfrak{R}}$ für $\varphi = \varphi^{(\varkappa)}$ identisch Null. Ferner mögen für $\varphi = \varphi^{(\varkappa)}$

$$Q_3(1, \lambda), \quad Y\sqrt{\mathfrak{R}'} + Y'\sqrt{\mathfrak{R}}, \quad \mathfrak{U}_0, \quad \mathfrak{R}' \tag{40.}$$

durch die

$$x_\varkappa\text{-}, \qquad z_\varkappa\text{-}, \qquad \varphi_\varkappa\text{-}, \ \sigma_\varkappa'\text{-te}$$

Potenz von $u^{\frac{1}{\beta_\varkappa}}$ teilbar werden. Dann folgt aus (8.)

$$x_\varkappa + 3\,z_\varkappa = \varphi_\varkappa + \tfrac{1}{2}\,\sigma_\varkappa'. \tag{41.}$$

Summieren wir über $\varkappa$, so wird

$\Sigma \varrho_\varkappa$ gleich dem Beitrag von S zu $(\mathfrak{U}_0, \mathfrak{J})$ gleich $(\mathfrak{U}_0, \mathfrak{J})_S$,
$\Sigma \sigma'_\varkappa$ gleich dem Beitrag von S zu $(\mathfrak{R}', \mathfrak{J})$ gleich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{J})_S$.

Setzen wir $\Sigma x_\varkappa = x_S$, $\Sigma z_\varkappa = z_S$, so folgt aus (41.)

$$x_S + 3 z_S = (\mathfrak{U}_0, \mathfrak{J})_S + \tfrac{1}{2} (\mathfrak{R}', \mathfrak{J})_S.$$

Summieren wir über alle Stellen S von F und setzen

$$\Sigma x_S = x, \ \Sigma y_S = y,$$

so erhalten wir

(42.) $$x + 3 z = (\mathfrak{U}_0, \mathfrak{J}) + \tfrac{1}{2} (\mathfrak{R}', \mathfrak{J}).$$

10. Beweis, daß $x = y$.

Um zu zeigen, daß $x = y$, genügt es zu beweisen, daß $x_S = y_S$ ist. Wir benutzen dazu folgenden Satz und folgende Bezeichnungen. Es seien $G(u, v) = 0$ und $H(u, v) = 0$ zwei gewöhnliche Potenzreihen von u, v, die für $u = v = 0$ verschwinden. Durch eine lineare homogene Transformation von u, v sei, wenn nötig, erreicht, daß v^g in G und v^h in H vorkommt, wenn G mit Gliedern g-ter und H mit Gliedern h-ter Dimension beginnt. Nach dem *Weierstraß*schen Vorbereitungssatze können wir G und H, da es hier auf einen Faktor, der für $u = v = 0$ nicht verschwindet, nicht ankommt, als ganze rationale Funktionen von v vom Grade g und h annehmen. Die Wurzeln von $G = 0$ für die Umgebung von $u = v = 0$ seien $v_1, v_2, \ldots, v_g$ und die von $H = 0$ seien $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(h)}$. Es mögen $v_\varkappa$ und $v^{(\lambda)}$ nach ganzen steigenden Potenzen von $u^{\frac{1}{\alpha_\varkappa}}$ und $u^{\frac{1}{\beta_\lambda}}$ fortschreiten. Es werde $G(u, v^{(\lambda)})$ durch die η_λ-te Potenz von $u^{\frac{1}{\beta_\lambda}}$ und $H(u, v_\varkappa)$ durch die $\xi_\varkappa$-te Potenz von $u^{\frac{1}{\alpha_\varkappa}}$ teilbar. Dann ist

$$\sum_\varkappa \xi_\varkappa = \sum_\lambda \eta_\lambda.$$

Denn diese Summen sind beide gleich der Zahl der Schnittpunkte von $G = 0$ und $H = 0$ im Punkte $u = v = 0$. Wir bezeichnen diese Zahl mit

(43.) $$(G, H)_0 = (H, G)_0.$$

Wir setzen

(44.) $$Q_3(1, \lambda) = G_1 + G_2 \sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'}, \ Q_3(1, \mu) = G_1 - G_2 \sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'},$$

so daß nach (6.)

(45.) $$G_1^2 - G_2^2 \mathfrak{R}\mathfrak{R}' = (G_1 + G_2 \sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'})(G_1 - G_2 \sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'}) = \mathfrak{S} N^3.$$

Ferner haben wir die Gleichung (7.), nämlich

(46.) $$Y^2 \mathfrak{R}' - Y'^2 \mathfrak{R} = (Y\sqrt{\mathfrak{R}'} + Y'\sqrt{\mathfrak{R}})(Y\sqrt{\mathfrak{R}'} - Y'\sqrt{\mathfrak{R}}) = \mathfrak{J} N.$$

In diesen Gleichungen ist N eine Einheit. Die Wurzeln von $\mathfrak{S}(u, v) = 0$ hatten wir mit $v_1, v_2, \ldots$ und die von $\mathfrak{J}(u, v) = 0$ mit $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots$ bezeichnet, und es sollten $v_\varkappa$ und $v^{(\lambda)}$ nach Potenzen von $u^{\frac{1}{\alpha_\varkappa}}$ und $u^{\frac{1}{\beta_\lambda}}$ fortschreiten. Das Vorzeichen von $\sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'}$ sei so gewählt, daß für $v = v_\varkappa$

(47.) $$G_1 - G_2 \sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'} = 0.$$

Es ist für $v = v_\varkappa$

(48.) $$Y\sqrt{\mathfrak{R}'} - Y'\sqrt{\mathfrak{R}}$$

durch die $y_\varkappa$-te Potenz von $u^{\frac{1}{\alpha_\varkappa}}$ teilbar. Es sei ferner für $v = v^{(\lambda)}$

(49.) $$Y\sqrt{\mathfrak{R}'} - Y'\sqrt{\mathfrak{R}} = 0.$$

Es ist

(50.) $$G_1 - G_2\sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'}$$

für $v = v^{(l)}$ durch die x_l-te Potenz von $u^{\frac{1}{\beta_l}}$ teilbar. Das war die Definition von $y_\varkappa$ und x_l. Wir haben zu beweisen, daß

(51.) $$\sum_\varkappa y_\varkappa = \sum_l x_l.$$

Wenn $\sqrt{\mathfrak{R}}$ und $\sqrt{\mathfrak{R}'}$ sich als gewöhnliche Potenzreihen von u, v darstellen ließen, so würde die Behauptung ohne weiteres aus dem eingangs angegebenen Satz folgen. Aber im allgemeinen lassen $\sqrt{\mathfrak{R}}$ und $\sqrt{\mathfrak{R}'}$ eine solche Darstellung nicht zu. Daher müssen wir einen kleinen Umweg einschlagen.

Es wird nach (47.) für $v = v_\varkappa$

(52.) $$\sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'} = \frac{G_1}{G_2},$$

also

(53.) $$Y\sqrt{\mathfrak{R}'} - Y'\sqrt{\mathfrak{R}} = \frac{Y G_1 - Y' \mathfrak{R} G_2}{G_2\sqrt{\mathfrak{R}}} = \frac{A}{G_2\sqrt{\mathfrak{R}}},$$

wenn wir zur Abkürzung setzen

(54.) $$Y G_1 - Y' \mathfrak{R} G_2 = A.$$

Die linke und rechte Seite von (53.) muß für $v = v_\varkappa$ durch dieselbe Potenz von u teilbar werden. Summieren wir gleich über $\varkappa$, so erhalten wir

(55.) $$y_S = (A, \mathfrak{S})_0 - (G_2, \mathfrak{S})_0 - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})_0.$$

Für $v = v^{(l)}$ wird nach (49.)

$$\sqrt{\mathfrak{R}'} = \frac{Y'}{Y}\sqrt{\mathfrak{R}},$$

also

$$G_1 - G_2\sqrt{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'} = \frac{Y G_1 - Y' \mathfrak{R} G_2}{Y} = \frac{A}{Y},$$

woraus wir folgern

(56.) $$x_S = (A, \mathfrak{J})_0 - (Y, \mathfrak{J})_0.$$

Für $A = 0$ wird nach (54.)

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{Y' \mathfrak{R}}{Y},$$

also nach (45.) und (46.)

(57.) $$N^3 \mathfrak{S} = G_2^2 \left\{\frac{G_1^2}{G_2^2} - \mathfrak{R}\mathfrak{R}'\right\} = G_2^2 B,$$

(58.) $$N\mathfrak{J} = \frac{Y^2}{\mathfrak{R}}\left\{\frac{Y'^2\mathfrak{R}^2}{Y^2} - \mathfrak{R}\mathfrak{R}'\right\} = \frac{Y^2}{\mathfrak{R}}\left\{\frac{G_1^2}{G_2^2} - \mathfrak{R}\mathfrak{R}'\right\} = \frac{Y^2}{\mathfrak{R}}B,$$

wo zur Abkürzung

(59.) $$\frac{G_1^2}{G_2^2} - \mathfrak{R}\mathfrak{R}' = B = \frac{Y'^2\mathfrak{R}^2}{Y^2} - \mathfrak{R}\mathfrak{R}'$$

gesetzt ist. Da N eine Einheit, so folgt aus (57.) und (58.)

(60.) $$(\mathfrak{S}, A)_0 = 2(A, G_2)_0 + (A, B)_0,$$

(61.) $$(\mathfrak{J}, A)_0 = 2(A, Y)_0 + (A, B)_0 - (A, \mathfrak{R})_0.$$

Für $G_2 = 0$ ist nach (45.) und (54.)

$$A = Y G_1,\ \mathfrak{S} N^3 = G_1^2,$$

so daß

(62.) $(A, G_2)_0 = (Y, G_2)_0 + (G_1, G_2)_0,\ (\mathfrak{S}, G_2)_0 = 2\,(G_1, G_2)_0.$

Für $Y = 0$ wird (46.) und (54.)

$$A = Y'\,G_2\,\mathfrak{R},\ N\,\mathfrak{J} = -\,Y'^2\,\mathfrak{R},$$

also

(63.) $(A, Y)_0 = (Y, Y')_0 + (G_2, Y)_0 + (\mathfrak{R}, Y)_0,\ (\mathfrak{J}, Y)_0 = 2\,(Y, Y')_0 + (\mathfrak{R}, Y)_0.$

Für $\mathfrak{R} = 0$ wird nach (45.) und (54.)

$$A = Y\,G_1,\ N^3\,\mathfrak{S} = G_1^2,$$

so daß

(64.) $(A, \mathfrak{R})_0 = (Y, \mathfrak{R})_0 + (G_1, \mathfrak{R})_0,\ (\mathfrak{S}, \mathfrak{R})_0 = 2\,(G_1, \mathfrak{R})_0.$

Aus (60.) und (62.) folgt

(65.) $(A, \mathfrak{S})_0 - (G_2, \mathfrak{S})_0 = (A, B)_0 + 2\,(Y, G_2)_0.$

Aus (55.), (64.) und (65.) ergibt sich

(66.) $y_S = (A, B)_0 + 2\,(Y, G_2)_0 - (G_1, \mathfrak{R})_0.$

Nach (61.) und (63.) ist

$$(A, \mathfrak{J})_0 = (A, B)_0 + 2\,(Y, Y')_0 + 2\,(G_2, Y)_0 + 2\,(\mathfrak{R}, Y)_0 - (A, \mathfrak{R})_0,$$

also nach (56.), (63.) und (64.)

(67.) $x_S = (A, \mathfrak{J})_0 - (Y, \mathfrak{J})_0 = (A, B)_0 + 2\,(Y, G_2)_0 - (G_1, \mathfrak{R})_0.$

Durch Vergleich von (66.) mit (67.) folgt die Behauptung (51.), nämlich $x_S = y_S$. Es ist also $x = y$ und wegen (38.)

(68.) $$x = y = n_2.$$

11. Bestimmung von z.

Es wird für $v = v^{(0)}$ nach (49.)

$$Y\sqrt{\mathfrak{R}'} = Y'\sqrt{\mathfrak{R}},$$

also

$$Y\sqrt{\mathfrak{R}'} + Y'\sqrt{\mathfrak{R}} = 2\,Y'\sqrt{\mathfrak{R}},$$

so daß nach der Definition von z_S in Nr. 9

(69.) $$z_S = (Y', \mathfrak{J})_0 + \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{R}, \mathfrak{J})_0.$$

Für $Y' = 0$ ist nach (46.)

$$N\,\mathfrak{J} = Y^2\,\mathfrak{R}'$$

und ebenso für $\mathfrak{R} = 0$

$$N\,\mathfrak{J} = Y^2\,\mathfrak{R}',$$

also

$$(Y', \mathfrak{J})_0 = 2\,(Y, Y')_0 + (\mathfrak{R}', Y')_0,\ (\mathfrak{R}, \mathfrak{J})_0 = 2\,(\mathfrak{R}, Y)_0 + (\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')_0,$$

so daß nach (69.)

(70.) $z_S = 2\,(Y, Y')_0 + (Y', \mathfrak{R}')_0 + (Y, \mathfrak{R})_0 + \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')_0.$

Zur Bestimmung von $(Y, Y')_0$ wählen wir die Gerade g als die Gerade $y_1 = y_2 = 0$. Sie soll keine besondere Lage haben, also F in n regulären Punkten je einmal schneiden. Es wird $p_{12} = p'_{34} = 1$, alle andern $p_{\varkappa\lambda}$, $p'_{\varkappa\lambda}$ gleich Null. Daher ist nach D. S. 191, (7.)—(10.)

(71.) $$Y = \mathfrak{A}_1 \frac{\partial\,\mathfrak{A}_2}{\partial\,v} - \mathfrak{A}_2 \frac{\partial\,\mathfrak{A}_1}{\partial\,v},\ Y' = \mathfrak{A}'_3 \frac{\partial\,\mathfrak{A}'_4}{\partial\,v} - \mathfrak{A}'_4 \frac{\partial\,\mathfrak{A}'_3}{\partial\,v}.$$

Sind a, b, c, d irgend welche Konstante, für die $a\,d - b\,c = 1$, so ist auch

$$Y = (a\,\mathfrak{A}_1 + b\,\mathfrak{A}_2)\frac{\partial}{\partial\,v}(c\,\mathfrak{A}_1 + d\,\mathfrak{A}_2) - (c\,\mathfrak{A}_1 + d\,\mathfrak{A}_2)\frac{\partial}{\partial\,v}(a\,\mathfrak{A}_1 + b\,\mathfrak{A}_2).$$

Wir können daher $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ durch irgend zwei von einander verschiedene Kurven des Büschels

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 - \lambda \mathfrak{A}_2 \tag{72.}$$

ersetzen, d. h. des Büschels der durch das Ebenenbüschel g aus F ausgeschnittenen Kurven.

Es sei S zunächst eine Stelle von F, durch die g nicht geht. Wir wählen $\mathfrak{A}_2$ als die Kurve des Büschels (72.), die durch S geht. Dann geht $\mathfrak{A}_1$ nicht durch S und $\mathfrak{A}_1(u, v)$ ist eine Einheit, kann also gleich 1 angenommen werden, da es auf einen Faktor bei den $\mathfrak{A}_i$ nicht ankommt. Es wird dann nach (71.)

$$Y = \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial v}. \tag{73.}$$

Es ist wegen $\mathfrak{A}_1 = 1$ nach D. S. 184 (5.) und (6.)

$$\Re \mathfrak{A}_3' = \begin{vmatrix} 1 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_4 \\ 0 & \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial u} \\ 0 & \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \Re \mathfrak{A}_4' = - \begin{vmatrix} 1 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_3 \\ 0 & \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial u} \\ 0 & \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial v} \end{vmatrix},$$

also nach (71.)

$$\Re Y' = \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial u}\left\{\frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{A}_4'}{\partial v} + \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{A}_3'}{\partial v}\right\} - \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial v}\left\{\frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{A}_4'}{\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{A}_3'}{\partial u}\right\}.$$

Für $Y = \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial v} = 0$ wird daher, wegen $\mathfrak{A}_1 = 1$, $\frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial v} = 0$,

$$\Re Y' = \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial u}\left\{\frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{A}_1'}{\partial v} + \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{A}_2'}{\partial v} + \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{A}_3'}{\partial v} + \frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{A}_4'}{\partial v}\right\},$$

oder wegen D. S. 188 (5.)

$$\Re Y' = - N \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial u} \text{ für } Y = \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial v} = 0. \tag{74.}$$

$\frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial u}$ und $\frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial v}$ haben bei unseren in Nr. 3 gemachten Annahmen keinen in S verschwindenden gemeinsamen Teiler. Hätten sie nämlich einen, so würde durch ihn mindestens eine durch S gehende Kurve $\mathfrak{P}$ definiert, längs der $\frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial v}$ Null wären. Es würde also $\mathfrak{A}_2$ längs $\mathfrak{P}$ konstant sein, also Null, da $\mathfrak{A}_2$ in S den Wert Null hat. Es ist also $\mathfrak{P}$ der ebene Schnitt $\mathfrak{A}_2$ oder ein Teil davon, jedenfalls eine algebraische Kurve. Längs $\mathfrak{P}$ würden $\mathfrak{A}_2$ und die beiden ersten Ableitungen von $\mathfrak{A}_2$ Null. Es würde also $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{A}_2$ mindestens in der zweiten Potenz enthalten sein. Daher müßte $\mathfrak{P}$ sein entweder eine Rückkehrkurve oder eine Ebenenkurve oder eine Punktkurve. Die beiden ersten Möglichkeiten können bei allgemeiner Lage von g nicht eintreten, da die Ebene von $\mathfrak{A}_2$ durch g geht. Die dritte Möglichkeit ist nach Folgerung 1. in Nr. 3 ausgeschlossen. Es wird daher für $\partial \mathfrak{A}_2/\partial v = 0$ nicht $\partial \mathfrak{A}_2/\partial u$ identisch Null. Aus (74.) schließen wir daher

$$(Y, Y')_0 + (Y, \Re)_0 = \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial v}\right)_0.$$

Um uns von der besonderen Wahl des Koordinatensystems frei zu machen,

schreiben wir $\mathfrak{A}_S$ statt $\mathfrak{A}_2$ und verstehen also unter $\mathfrak{A}_S$ den ebenen Schnitt von F, der durch S geht und dessen Ebene durch g geht. Dann ist

$$(75.) \qquad (Y, Y')_0 + (Y, \mathfrak{R})_0 = \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_S}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{A}_S}{\partial v}\right)_0.$$

12. Ein Hilfssatz.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine ganze Kurve von F ohne mehrfache Faktoren. Sie gehe durch die Stelle S, und es sei $\mathfrak{G}(u, v)$ die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{G}$ für die Stelle S. Es sei $2\sigma_0$ der Beitrag von S zu der Ordnung des Divisors der mehrfachen Stellen von $\mathfrak{G}$; ferner sei ν_0 die Zahl der Zweige von $\mathfrak{G}$, die durch S gehen; dann ist

$$(76.) \qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial v}\right)_0 = 2\sigma_0 - \nu_0 + 1.$$

Nach dem *Weierstraß*schen Vorbereitungssatz können wir $\mathfrak{G}(u, v)$ als ganze rationale Funktion von v annehmen, in der der Koeffizient der höchsten Potenz von v gleich 1 ist, während die andern Koeffizienten gewöhnliche Potenzreihen von u sind, die für $u = 0$ verschwinden. Der Grad von $\mathfrak{G}(u, v)$ sei l. Die Gleichung

$$(77.) \qquad \mathfrak{G}(u, v) = 0$$

gebe λ Entwicklungen für v, die für $u = v$ verschwinden, etwa

$$(78.) \qquad v_1, v_2, \ldots, v_\lambda.$$

Es schreite $v_\varkappa$ nach ganzen Potenzen von $u^{\frac{1}{\varepsilon_\varkappa}}$ fort. Die $\varepsilon_\varkappa - 1$ konjugierten Entwicklungen, die zu $v_\varkappa$ gehören, sollen nicht unter die v_i aufgenommen sein. Da zu jedem Werte von u in der Umgebung von S jede Funktion v_α mit ihren $\varepsilon_\alpha - 1$ konjugierten ε_α Werte von v liefert, die der Gleichung $\mathfrak{G}(u, v) = 0$ genügen, und da andrerseits diese Gleichung vom Grade l ist, und wegen der Beschaffenheit ihrer Koeffizienten nur Wurzeln hat, die für $u = 0$ verschwinden, so folgt

$$(79.) \qquad \Sigma \varepsilon_\varkappa = l.$$

Jeder der Entwicklungen (78.) entspricht ein durch S gehender Zweig von $\mathfrak{G}$, so daß

$$(80.) \qquad \lambda = \nu_0.$$

Es sei $\partial \mathfrak{G}/\partial v$ für $v = v_\varkappa$ durch die $\delta_\varkappa$-te Potenz von $u^{\frac{1}{\varepsilon_\varkappa}}$ teilbar. Dann ist

$$\left(\mathfrak{G}, \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial v}\right)_0 = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_\lambda,$$

$$2\sigma_0 = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_\lambda - (\varepsilon_1 - 1) - (\varepsilon_2 - 1) - \cdots - (\varepsilon_\lambda - 1),$$

also wegen (79.) und (80.)

$$(81.) \qquad 2\sigma_0 - \nu_0 + 1 = \left(\mathfrak{G}, \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial v}\right)_0 - l + 1.$$

Wir betrachten nunmehr die Gleichung

$$(82.) \qquad \frac{\partial \mathfrak{G}(u, v)}{\partial v} = 0.$$

Sie ist in v vom Grade $l - 1$. Sie liefere μ Entwicklungen für v, die für $u = 0$ verschwinden, etwa

$$v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(\mu)}.$$

Von konjugierten Entwicklungen soll immer nur eine unter die $v^{(i)}$ aufgenommen sein. Schreitet $v^{(\varkappa)}$ nach ganzen Potenzen von $u^{\frac{1}{\zeta_\varkappa}}$ fort, so ist dann

(83.) $$\Sigma \zeta_\alpha = l - 1,$$

da die Wurzeln von (82.) alle für $u = 0$ verschwinden. Es werde $\mathfrak{G}(u, v)$ für $v = v^{(\varkappa)}$ durch die $\gamma_\varkappa$-te Potenz von $u^{\frac{1}{\zeta_\varkappa}}$ teilbar. Es ist dann

(84.) $$\left(\mathfrak{G}, \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial v}\right)_0 = \Sigma \gamma_\varkappa,$$

(85.) $$\mathfrak{G}(u, v^{(\varkappa)}) = u^{\frac{\gamma_\varkappa}{\zeta_\varkappa}} e_\varkappa(u),$$

wo $e_\varkappa(u)$ eine Einheit ist. Es wird, da $v^{(\varkappa)}$ eine Lösung von (82.) ist,

$$\frac{d\,\mathfrak{G}(u, v^{(\varkappa)})}{d\,u} = \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial v}\frac{d\,v^{(\varkappa)}}{d\,u} = \left\{\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial u}\right\}_{v = v^{(\varkappa)}}$$

oder wegen (85.)

$$\left\{\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial u}\right\}_{v = v^{(\varkappa)}} = u^{\frac{\gamma_\varkappa - \zeta_\varkappa}{\zeta_\varkappa}} e'_\varkappa,$$

wo $e'_\varkappa$ eine Einheit ist. Daher wird

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial v}\right)_0 = \Sigma(\gamma_\varkappa - \zeta_\varkappa)$$

oder wegen (83.) und (84.)

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial v}\right)_0 = \left(\mathfrak{G}, \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial v}\right)_0 - l + 1.$$

Durch Vergleich mit (81.) ergibt sich die Behauptung (76.).

13. Bestimmung von $\varkappa$. (Fortsetzung).

Es sei $\lambda_1 \mathfrak{G}_1 + \lambda_2 \mathfrak{G}_2$ eine einfach unendliche lineare Kurvenschar auf F. Die Kurven mögen auf F f einfache feste Punkte mit beweglichen Tangenten haben. Das Geschlecht einer allgemeinen Kurve der Schar sei π. Unter den Kurven sei keine, die eine Primkurve in höherer als der ersten Potenz enthält. Unter den Kurven der Schar gibt es eine endliche Anzahl, die mehrfache Stellen haben. Es sei S eine Stelle von F, die nicht zu den festen Stellen der Schar gehört, und $\mathfrak{G}$ sei diejenige Kurve der Schar, die durch S geht. Wir setzen dann in den Bezeichnungen der Nr. 12

$$\delta_S = 2\sigma_0 - \nu_0 + 1 = \left(\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial v}\right)_0.$$

Hat $\mathfrak{G}$ in S keine mehrfache Stelle, so ist $\delta_S = 0$. Setzen wir

$$\Sigma \delta_S = \delta,$$

wo über alle Stellen S von F summiert werden soll, die nicht zu den festen Stellen der Schar gehören, so ist die Zahl

$$Z = \delta - 4\pi - f$$

unabhängig von der Wahl des Kurvenbüschels [1]). Es ist Z die *Zeuthen-Segre*sche Invariante von F.

Nehmen wir im besonderen die lineare Kurvenschar, die von den durch die Gerade g gehenden Ebenen ausgeschnitten wird, so wird δ_S gerade die auf der rechten Seite von (75.) stehende Größe. Es wird π gleich dem Geschlecht eines allgemeinen

[1]) *Heinrich W. E. Jung,* Über die *Zeuthen-Segre*sche Invariante. Palermo Rend. 34. (1912), p. 225—277.

ebenen Schnittes, das wir mit p bezeichnen. Es wird ferner $f = n$, da die festen Stellen der Kurvenschar die n Schnittpunkte von g mit F sind. Daher wird

(86.) $$Z = \delta - 4p - n,$$

(87.) $$\delta = \sum_s \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_s}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{A}_s}{\partial v}\right)_0,$$

wo die letzte Summe über alle Stellen von F zu erstrecken ist, mit Ausnahme derjenigen, durch die die Gerade g geht.

Ehe wir aus der Gleichung (75.) weitere Schlüsse ziehen, müssen wir noch den Beitrag der n Schnittstellen von g mit F zu der linken und rechten Seite von (75.) berechnen. Es sei S eine dieser Stellen. Es wird in S sowohl $\mathfrak{A}_1$ wie $\mathfrak{A}_2$ Null. Da S eine reguläre Stelle von F sein soll, so können wir annehmen

$$\mathfrak{A}_1 = u, \quad \mathfrak{A}_2 = v, \quad \mathfrak{R} = 1.$$

Nach (71.) wird

$$Y = u.$$

Ferner wird ähnlich wie in Nr. 11

$$\mathfrak{R}\,\mathfrak{A}_3' = \mathfrak{A}_3' = \begin{vmatrix} u & v & \mathfrak{A}_4 \\ 1 & 0 & \frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{R}\,\mathfrak{A}_4' = \mathfrak{A}_4' = -\begin{vmatrix} u & v & \mathfrak{A}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial v} \end{vmatrix}$$

und nach (71.) für $Y = u = 0$:

$$Y' = \mathfrak{A}_3' \frac{\partial \mathfrak{A}_4'}{\partial v} - \mathfrak{A}_4' \frac{\partial \mathfrak{A}_3'}{\partial v} = \mathfrak{A}_4 \frac{\partial \mathfrak{A}_4'}{\partial v} + \mathfrak{A}_3 \frac{\partial \mathfrak{A}_3'}{\partial v} - v\left\{\frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{A}_4'}{\partial v} + \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{A}_3'}{\partial v}\right\}.$$

Da $\mathfrak{A}_2 = v, \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial v} = 1, \frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial v} = 0$, so ist für $Y = u = \mathfrak{A}_1 = 0$:

$$Y' = \mathfrak{A}_1 \frac{\partial \mathfrak{A}_1'}{\partial v} + \mathfrak{A}_2 \frac{\partial \mathfrak{A}_2'}{\partial v} + \mathfrak{A}_3 \frac{\partial \mathfrak{A}_3'}{\partial v} + \mathfrak{A}_4 \frac{\partial \mathfrak{A}_4'}{\partial v}$$
$$- v\left\{\frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{A}_1'}{\partial v} + \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{A}_2'}{\partial v} + \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{A}_3'}{\partial v} + \frac{\partial \mathfrak{A}_4}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{A}_4'}{\partial v}\right\}.$$

Nach D. S. 186 (9.) und S. 188 (5.) ist also

$$Y' = v\,N \text{ für } Y = u = 0.$$

Da N eine Einheit ist, so folgt

$$(Y, Y')_0 = 1.$$

Jede der n Stellen, wo die Gerade g die Fläche F trifft, liefert also zu (Y, Y') den Beitrag 1. Zu $(Y, \mathfrak{R})$ liefert sie den Beitrag Null, da $\mathfrak{R}$ nicht durch diese Stellen geht. Summieren wir also in (75.) links über alle Stellen von F und rechts über alle Stellen von F, durch die die Gerade g nicht geht, so wird wegen (86.) und (87.)

(88.) $$\Sigma\,(Y, Y')_0 + \Sigma\,(Y, \mathfrak{R})_0 = \delta + n = Z + 2n + 4p.$$

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}_s'$ die Berührungskurve desjenigen Berührungskegels von F, dessen Spitze auf der Geraden g liegt und dessen Berührungskurve durch S geht, so sei gesetzt

(89.) $$\sum_s \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_s'}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{A}_s'}{\partial v}\right)_0 = \delta',$$

wo die Summe über alle Stellen von F erstreckt werden soll mit Ausnahme der-

jenigen, wo die durch g gehenden Berührungsebenen F berühren. Dabei soll g so gewählt sein, daß die n' durch g gehenden Berührungsebenen F in n' von einander verschiedenen regulären Stellen berühren. Bezeichnen wir mit p' das Geschlecht einer allgemeinen Berührungskurve, so haben wir dual zu (86.) und (88.)

$$(90.) \qquad Z = \delta' - 4p' - n',$$

$$(91.) \qquad \sum_S (Y, Y')_0 + \sum_S (Y', \mathfrak{R}') = \delta' + n' = Z + 2n' + 4p'.$$

Durch Addition von (88.) und (91.) folgt wegen (70.)

$$(92.) \quad \begin{cases} z = \sum z_S = \delta + \delta' + n + n' + \frac{1}{2}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') \\ \qquad = 2Z + 2(n + n') + 4(p + p') + \frac{1}{2}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'). \end{cases}$$

14. Gleichungen für n_1 und n_2.

Aus (42.), (68.) und (92.) folgt

$$(93.) \quad n_2 = (\mathfrak{J}, \mathfrak{U}_0) + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{J}, \mathfrak{R}') - \tfrac{3}{2}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') - 6\{Z + n + n' + 2p + 2p'\}.$$

Aus (39.) folgt dann

$$(94.) \quad 2n_1 = (\mathfrak{S}, \mathfrak{U}_0) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{S}, \mathfrak{R}) - 3(\mathfrak{J}, \mathfrak{U}_0) - \tfrac{3}{2}(\mathfrak{J}, \mathfrak{R}') + \tfrac{9}{2}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') + 18\{Z + n + n' + 2p + 2p'\}.$$

Mit Hilfe der Äquivalenzen D. S. 221 können wir die für n_1 und n_2 gefundenen Werte in mannigfacher Weise umformen. Es ist z. B.

$$\mathfrak{U}_0^2 \mathfrak{R}' \sim \mathfrak{S}\,\mathfrak{J}^3, \quad \mathfrak{K} \sim \mathfrak{A}^{n-4}\,\mathfrak{D}^{-1} \sim \mathfrak{J}\,\mathfrak{A}^{-2}\,\mathfrak{A}'^{-2},$$

wo $\mathfrak{K}$ der kanonischen Klasse angehört, so daß

$$(95.) \quad \begin{cases} 2(\mathfrak{J}, \mathfrak{A}_0) + (\mathfrak{J}, \mathfrak{R}') = (\mathfrak{J}, \mathfrak{S}) + 3(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}), \\ 2(\mathfrak{S}, \mathfrak{U}_0) + (\mathfrak{S}, \mathfrak{R}') = (\mathfrak{S}, \mathfrak{S}) + 3(\mathfrak{S}, \mathfrak{J}), \\ 2p - 2 = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\,\mathfrak{K}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{J}\,\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}'^{-2}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{J}) - n - 2(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'), \\ 2p' - 2 = (\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'\,\mathfrak{K}) = (\mathfrak{A}', \mathfrak{J}\,\mathfrak{A}^{-2}\mathfrak{A}'^{-1}) = (\mathfrak{A}', \mathfrak{J}) - n' - 2(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'). \end{cases}$$

Hiermit folgt aus (93.) und (94.):

$$(96.) \quad 2n_2 = 3(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}) + (\mathfrak{J}, \mathfrak{S}) - 3(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') - 12\{Z + (\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}', \mathfrak{J}) - 4(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}') + 4\},$$

$$(97.) \quad 4n_1 = (\mathfrak{S}, \mathfrak{S}) - 9(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}) - (\mathfrak{S}, \mathfrak{R}\,\mathfrak{R}') + 9(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') + 36\{Z + (\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}', \mathfrak{J}) - 4(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}') + 4\}.$$

Aus diesen Formeln ersieht man, daß n_1 und n_2, wie es sein muß, zu sich selbst dual sind.

Wir geben für n_1 und n_2 noch andere Darstellungen.

Es sei gesetzt

$$(98.) \quad \begin{cases} (\mathfrak{A}, \mathfrak{D}) = 2b, & (\mathfrak{A}, \mathfrak{R}) = c, & (\mathfrak{A}', \mathfrak{D}') = 2b', & (\mathfrak{A}', \mathfrak{R}') = c', \\ (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = n, & (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}') = a, & (\mathfrak{A}', \mathfrak{A}') = n', & \\ (\mathfrak{D}, \mathfrak{D}) = t, & (\mathfrak{D}, \mathfrak{R}) = s, & (\mathfrak{R}, \mathfrak{R}) = r, & \\ (\mathfrak{D}', \mathfrak{D}') = t', & (\mathfrak{D}', \mathfrak{R}') = s', & (\mathfrak{R}', \mathfrak{R}') = r'. & \end{cases}$$

Aus den Äquivalenzen D. S. 221 folgt

$$(99.) \quad \begin{cases} \mathfrak{J} \sim \mathfrak{A}^{3n-4}\,\mathfrak{R}^{-2}\,\mathfrak{D}^{-3}, & \mathfrak{R}' \sim \mathfrak{A}^{4n-8}\,\mathfrak{R}^{-3}\,\mathfrak{D}^{-4}, \\ \mathfrak{S} \sim \mathfrak{A}^{11n-24}\,\mathfrak{R}^{-5}\,\mathfrak{D}^{-11}, & \mathfrak{A}' \sim \mathfrak{A}^{n-1}\,\mathfrak{R}^{-1}\,\mathfrak{D}^{-1}. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich

$$(100.)\quad \begin{cases} (\mathfrak{J},\mathfrak{J}) = (3n-4)^2 n - 12(3n-4)b - 4(3n-4)c + 4r + 12s + 9t, \\ (\mathfrak{J},\mathfrak{S}) = (3n-4)(11n-24)n - 4(33n-58)b - (37n-68)c \\ \qquad\qquad + 10r + 37s + 33t, \\ (\mathfrak{S},\mathfrak{S}) = (11n-24)^2 n - 44(11n-24)b - 10(11n-24)c \\ \qquad\qquad + 25r + 110s + 121t, \\ (\mathfrak{R},\mathfrak{R}') = (4n-8)c - 3r - 4s, \\ (\mathfrak{S},\mathfrak{R}\,\mathfrak{R}') = (4n-8)(11n-24)n - 16(11n-23)b - 2(21-44)c \\ \qquad\qquad + 10r + 42s + 44t, \\ (\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}',\mathfrak{J}) = (3n-4)n^2 - 4(3n-2)b - (5n-4)c + 2r + 5s + 3t, \end{cases}$$

$$(101.)\quad \begin{cases} (\mathfrak{A},\mathfrak{A}') = (n-1)n - 2b - c, \\ (\mathfrak{A}',\mathfrak{A}') = n' = (n-1)^2 n - 4(n-1)b - 2(n-1)c + r + 2s + t, \\ 2p-2 = (\mathfrak{A},\mathfrak{A}\,\mathfrak{K}) = (\mathfrak{A},\mathfrak{A}^{n-3}\,\mathfrak{D}^{-1}) = n(n-3) - 2b. \end{cases}$$

Zu der Größe δ liefern diejenigen ebenen Schnitte von F einen Beitrag, deren Ebenen durch die Gerade g gehen und die als Kurven von F eine mehrfache Stelle haben. Und zwar liefert, wie in Nr. 13 angegeben, eine solche mehrfache Stelle S den Beitrag

$$(102.)\qquad \delta_S = \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_S}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{A}_S}{\partial v}\right)_0$$

zu δ, wenn $\mathfrak{A}_S$ derjenige ebene Schnitt von F ist, dessen Ebene durch g und S geht. Hat F keine Besonderheiten, so sind die n' durch g gehenden Berührungsebenen die einzigen, deren Schnittkurven mit F eine mehrfache Stelle haben; und zwar haben sie in dem Berührungspunkte ihrer Ebene einen gewöhnlichen Doppelpunkt, der nach (102.) den Beitrag 1 zu δ liefert. Im einfachsten Falle ist also $\delta = n'$. Wir setzen

$$(103.)\qquad \delta = n' + h_0$$

und aus dual entsprechenden Gründen

$$(104.)\qquad \delta' = n + h_0'.$$

Es ist $h_0 = 0$, wenn F eine allgemeine Ordnungsfläche ist und $h_0' = 0$, wenn F eine allgemeine Klassenfläche ist. Es wird nach (86.), (101.) und (103.)

$$(105.)\quad \begin{cases} Z = \delta - 4p - n = n' - 2(2p-2) - n - 4 + h_0 \\ \quad = n(n^2 - 4n + 6) - 4(n-2)b - 2(n-1)c - 4 + h_0, \end{cases}$$

$$Z + (\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}',\mathfrak{J}) - 4(\mathfrak{A},\mathfrak{A}') + 4 = 2n(2n^2 - 6n + 5) - 8(2n-3)b - (7n-14)c + 3r + 7s + 4t + h_0.$$

Mit Hilfe der angegebenen Formeln ergibt sich aus (96.), (97.)

$$(106.)\quad n_1 = 5n(7n^2 - 28n + 30) - 140(n-2)b - 2(22n-37)c + 15r + 44s + 35t + 9h_0,$$

$$(107.)\quad 2n_2 = 4n(n-3)(3n-2) - 8(6n-11)b - (n-20)c - 5r + s + 12t - 12h_0.$$

Dual hierzu ist auch

$$(108.)\quad n_1 = 5n'(7n'^2 - 28n' + 30) - 140(n'-2)b' - 2(22n'-37)c' + 15r' + 44s' + 35t' + 9h_0',$$

$$(109.)\quad 2n_2 = 4n'(n'-3)(3n'-2) - 8(6n'-11)b' - (n'-20)c' - 5r' + s' + 12t' - 12h_0'.$$

Ist F eine allgemeine Ordnungsfläche, so ist

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{R} = 1,\ r = s = t = 0,\ b = c = h_0 = 0,$$

also

(110.) $n_1 = 5n(7n^2 - 28n + 30),\ n_2 = 2n(n-3)(3n-2),$

wie in *Salmon-Fiedler*, Analyt. Geom. des Raumes II. 3. Aufl. S. 640 und S. 635. Dort ist n_1 mit α und n_2 mit a bezeichnet.

Hat F an Besonderheiten nur eine Doppelkurve der Ordnung b und des Geschlechts π mit τ dreifachen Punkten, so hat F an singulären Punkten nur die Punkte, wo die beiden durch die Doppelkurve gehenden Blätter von F zusammenhängen. Ihre Anzahl sei w. In jeden dieser w Punkte ist eine Kurve kondensiert, und $\mathfrak{R}$ besteht aus diesen w Punktkurven. Es wird in diesem Falle, wie ich an andrer Stelle zu beweisen gedenke,

(111.) $$\begin{cases} c = 0,\ r = -4w,\ s = 2w,\ t = 8(\pi - 1) - 3nb + 16b + 15\tau, \\ h_0 = w,\ w = -4(\pi - 1) + 2nb - 8b - 6\tau, \end{cases}$$

sodaß

(112.) $n_1 = 5n(7n^2 - 28n + 30) + 32(\pi - 1) - (171n - 544)b + 303\tau,$

(113.) $n_2 = 2n(n-3)(3n-2) + 28(\pi - 1) - 8(n-7)b + 60\tau.$

Aus den Äquivalenzen in D. S. 221 ergibt sich wegen $\mathfrak{K} \sim \mathfrak{R}\,\mathfrak{A}'\,\mathfrak{A}^{-3} \sim \mathfrak{R}'\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}'^{-3} \sim \mathfrak{A}^{n-4}\,\mathfrak{D}^{-1}$

(114.) $$\begin{cases} \mathfrak{R} \sim \mathfrak{K}\,\mathfrak{A}^3\,\mathfrak{A}'^{-1},\ \mathfrak{R}' \sim \mathfrak{K}\,\mathfrak{A}^{-1}\,\mathfrak{A}'^3, \\ \mathfrak{J} \sim \mathfrak{K}\,\mathfrak{A}^2\,\mathfrak{A}'^2\ ,\ \mathfrak{S} \sim \mathfrak{K}^6\,\mathfrak{A}^5\,\mathfrak{A}'^5. \end{cases}$$

Ferner folgt aus $2p - 2 = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\,\mathfrak{K}),\ 2p' - 2 = (\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'\,\mathfrak{K})$:

(115.) $(\mathfrak{A}, \mathfrak{K}) = 2p - 2 - n,\ (\mathfrak{A}', \mathfrak{K}) = 2p' - 2 - n'.$

Aus (114.) und (115.) schließen wir

(116.) $$\begin{cases} (\mathfrak{S}, \mathfrak{S}) = 36(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + 120(p + p' - 2) - 35(n + n') + 50a, \\ (\mathfrak{J}, \mathfrak{J}) = (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + 8(p + p' - 2) + 8a, \\ (\mathfrak{J}, \mathfrak{S}) = 6(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + 34(p + p' - 2) - 7(n + n') + 20a, \\ (\mathfrak{S}, \mathfrak{R}\mathfrak{R}') = 12(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + 44(p + p' - 2) + 12(n + n') - 20a, \\ (\mathfrak{J}, \mathfrak{A}\,\mathfrak{A}') = 2(p + p' - 2) + (n + n') + 4a, \\ (\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') = (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + 4(p + p' - 2) - 5(n + n') + 10a. \end{cases}$$

Es ist aber [1])

(117.) $Z + (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + 4 = 12(p_a + 1),$

wo p_a das arithmetische Geschlecht von F ist. Daher erhalten wir aus (96.), (97.) in Verbindung mit (116.) und (117.)

(118.) $n_1 = 72(p_a + 1) + 28(p + p' - 2) + 3(Z + 4) - 8(n + n') + 12a,$

(119.) $n_2 = 36(p_a + 1) + 11(p + p' - 2) - 9(Z + 4) - 2(n + n') + 7a.$

15. Befreiung von den einschränkenden Annahmen der Nr. 3.

Die Formeln (93.) und (94.) lassen sich wegen (86.), (90.), (103.) und (104.) in folgender Weise schreiben:

(120.) $2n_1 = (\mathfrak{U}_0, \mathfrak{S}) - \frac{1}{2}(\mathfrak{S}, \mathfrak{R}) - 3(\mathfrak{J}, \mathfrak{U}_0) - \frac{3}{2}(\mathfrak{J}, \mathfrak{R}') + \frac{9}{2}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') + 9(h_0 + h_0' + 2n + 2n'),$

(121.) $n_2 = (\mathfrak{U}_0, \mathfrak{J}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{J}, \mathfrak{R}') - \frac{3}{2}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') - 3(h_0 + h_0' + 2n + 2n').$

In dieser Gestalt lassen die Formeln erkennen, welchen Beitrag eine Stelle S von F zu n_1 und n_2 liefert. Wir nehmen, wie früher, an, daß die Gerade g keine

[1]) Enz. d. math. Wiss. III. C 7.

besondere Lage hat, daß sie also F in n von einander verschiedenen gewöhnlichen Stellen trifft und daß die n' durch sie gehenden Berührungsebenen von einander verschieden sind und F in regulären Stellen berühren. Diese $n + n'$ Stellen liefern keinen Beitrag zu n_1 und n_2. Das folgt schon daraus, daß diese Stellen garnichts Besonderes haben, folgt aber auch aus (120.) und (121.). Ist nämlich S eine der n Stellen, wo g die Fläche F trifft, so liefert sie nur zu $(\mathfrak{J}, \mathfrak{U}_0)$ einen Beitrag, zu den andern Summanden in (120.) und (121.) nicht, da $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{S}$ nicht durch S gehen. Es geht aber durch S die Kurve $\mathfrak{J}$ zweimal und $\mathfrak{U}_0$ dreimal, weil die beiden Inflexionstangenten und die drei *Clebsch*schen Tangenten in S die Gerade g natürlich treffen. Es liefert daher jede der n Schnittsteilen von g mit F den Beitrag 6 zu $(\mathfrak{J}, \mathfrak{U}_0)$. Ebenso liefert jede der n' Berührungsstellen der durch g gehenden Berührungsebenen den Beitrag 6 zu $(\mathfrak{J}, \mathfrak{U}_0)$. Alle diese $n + n'$ Stellen liefern also zu $(\mathfrak{J}, \mathfrak{U}_0)$ den Beitrag $6\,(n + n')$, also nach (120.) und (121.) zu $2\,n_1$ den Beitrag $-18\,(n + n')$ und zu n_2 den Beitrag $6\,(n + n')$, was sich gegen die letzten Summanden in (120.) und (121.) forthebt.

Bezeichnen wir also den Beitrag, den eine Stelle S zu einer Größe liefert, durch Anhängen des Index S, so sind die Beiträge einer von den $n + n'$ eben betrachteten Stellen verschiedenen Stellen zu $2\,n_1$ und n_2:

$$(122.)\quad \{2\,n_1\}_S = (\mathfrak{S}, \mathfrak{U}_0)_S - \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{S}, \mathfrak{R})_S - 3\,(\mathfrak{J}, \mathfrak{U}_0)_S - \tfrac{3}{2}\,(\mathfrak{J}, \mathfrak{R}')_S + \tfrac{9}{2}\,(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')_S + 9\,(h_0 + h_0')_S,$$

$$(123.)\quad \{n_2\}_S = (\mathfrak{J}, \mathfrak{U}_0)_S + \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{J}, \mathfrak{R}')_S - \tfrac{3}{2}\,(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')_S - 3\,(h_0 + h_0')_S.$$

Dabei ist unter $\{h_0\}_S$ und $\{h_0'\}_S$ der Beitrag zu verstehen, den S zu den Zahlen δ und δ' der *Zeuthen-Segre*schen Invariante liefert.

Dies gilt, wenn die Kurven $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ keine Primkurven gemeinsam haben. Haben sie Punktkurven gemeinsam, so kann man den Beitrag jedes Punktes von F, in den diese Kurven kondensiert sind, gesondert bestimmen. Haben sie aber nicht in einen Punkt kondensierte Kurven gemeinsam, so kann man den Beitrag dieser Kurven zu n_1 und n_2 im ganzen bestimmen, nicht aber den der einzelnen Stellen dieser Kurven.

Wenn man will, kann man die gefundenen Formeln für beliebige Flächen gelten lassen, auch wenn die in Nr. 3 gemachten Annahmen nicht statthaben. Es wird dann in der eben angegebenen Weise durch die Formeln selbst definiert, wie oft eine Stelle oder eine Kurve von Stellen, wo beide Inflexionstangenten *Salmon*sch sind, in der Zahl n_1 und wie oft eine Stelle oder eine Kurve von Stellen, deren eine Inflexionstangente *Salmon*sch ist und durch g geht, in n_2 zu rechnen ist.

Über die simultane Zerfällung ganzer Zahlen in 1-te und n-te Potenzen.

Von Herrn *E. Kamke* in Hagen i. W.

Über die simultane Zerfällbarkeit ganzer Zahlen in 1-, 2-, . . ., n-te Potenzen besteht folgender allgemeine Satz [1]):

Für jede ganze Zahl $n \geqq 2$ gibt es eine ganze Zahl $N = N(n) > 0$, eine ganze Zahl $A > 0$ und positive Zahlen i_1 und i_ν, I_ν $(0 < i_\nu < I_\nu)$ für $\nu = 2, 3, \ldots, n$ von der Art, daß für je n durch A teilbare ganze Zahlen $l_1, \ldots, l_n$, welche die Ungleichungen

$$l_1 > i_1;\ i_\nu l_1 < l_\nu < I_\nu l_1 \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n)$$

erfüllen, die n Gleichungen

$$l_\nu = \sum_{x=1}^{N} x_x^\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

simultan durch ganze Zahlen $x_x \geqq 0$ lösbar sind.

Für den Fall, daß man sich auf die simultane Zerfällung von Zahlen nur in 1-te und n-te Potenzen beschränkt, ist eine genaue Bestimmung der in vorstehendem Satze auftretenden Zahl A möglich. Zunächst ist nämlich selbstverständlich, daß die zu zerfällenden Zahlen l_1 und l_n einander kongruent modulo T sein müssen, wo T den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen $x^n - x$ für $x = 2, 3, \ldots$ bezeichnet. Aber diese Tatsache läßt sich auch umkehren. Das soll im § 2 dieser Arbeit gezeigt werden, nachdem im § 1 für die Zahl T noch ein anderer Ausdruck abgeleitet ist.

§ 1.

Es sei $n \geqq 2$ eine ganze Zahl; es bezeichne T den größten gemeinsamen Teiler aller Zahlen $x^n - x$, wobei x alle ganzen Zahlen durchlaufen soll; endlich bezeichne q eine Primzahl, für die $q - 1$ in $n - 1$ aufgeht; dann ist

$$T = \Pi q,$$

wobei das Produkt über alle verschiedenen Primzahlen q zu erstrecken ist.

Beweis: T ist quadratfrei; denn sonst würde für eine Primzahl p, deren Quadrat in T enthalten ist, sich bei $x = p$ ergeben:

$$-p \equiv x^n - x \equiv 0 \pmod{p^2},$$

was unmöglich ist. Daher ist der Satz bewiesen, sobald gezeigt ist:

a) jedes q geht in jedem $x^n - x$ auf;

b) jede Primzahl p, die in T aufgeht, ist ein q.

[1]) *Kamke*, Verallgemeinerungen des *Waring-Hilbert*schen Satzes [Math. Ann., Bd. 83 (1921), S. 85—112].

Das läßt sich aber so beweisen:

a) Für jede nicht durch q teilbare ganze Zahl x ist

$$x^{q-1} \equiv 1 \pmod{q},$$

also

$$x^{n-1} = (x^{q-1})^{\frac{n-1}{q-1}} \equiv 1 \pmod{q},$$

mithin für jedes ganze x

$$x^n \equiv x \pmod{q}.$$

b) Für jede Primzahl p hat die Kongruenz

$$x^{n-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

bekanntlich $(n-1, p-1)$ Lösungen x mod. p. Geht nun p in T auf, so hat die Kongruenz $p-1$ Lösungen, also geht $p-1$ in $n-1$ auf, d. h. p ist ein q.

§ 2.

Es sei $n \geqq 2$ eine ganze Zahl; es bezeichne Q das Produkt aller verschiedenen Primzahlen q, für die $q-1$ in $n-1$ aufgeht; dann gibt es Zahlen $M > 0$, ganz; $k_1 > 0$; $0 < j < J$ von der Art, daß für je zwei ganze Zahlen k, l, welche die Bedingungen

$$k \equiv l \pmod{Q},$$

$$k > k_1;\ j\,k^n < l < J\,k^n$$

erfüllen, die Gleichungen

$$k = \sum_{x=1}^{M} x_x, \quad l = \sum_{x=1}^{M} x_x^n$$

simultan durch ganze Zahlen $x_x \geqq 0$ lösbar sind.

Beweis: Nach dem in der Einleitung angeführten Satz gibt es (es wird $A\,K$ für l_1 und $A\,L$ für l_n geschrieben) positive ganze Zahlen N und A, sowie Zahlen $0 < i < I$, so daß für jedes hinreichend große ganze K und alle ganzen L innerhalb des Intervalls

$$i\,(A\,K)^n < A\,L < I\,(A\,K)^n$$

Darstellungen

$$A\,K = \sum_{x=1}^{N} y_x, \quad A\,L = \sum_{x=1}^{N} y_x^n$$

mit ganzen Zahlen $y_x \geqq 0$ bestehen. Bei hinreichend großem K gibt es eine Zahl L, die der vorstehenden Ungleichung genügt und für die überdies $(Q, L-K) = 1$ ist; da aber Q nach § 1 in jedem $y_x^n - y_x$, also auch in $A\,(L-K)$ aufgeht, so geht Q in A auf.

Es seien nun k, l positive ganze Zahlen, für die

$$k \equiv l \pmod{Q}$$

ist. Da Q nach § 1 der größte gemeinsame Teiler aller $x^n - x$ ist, gibt es eine Zahl X, so daß die ganzen Zahlen

$$2^n - 2,\ 3^n - 3, \ldots, X^n - X$$

den größten gemeinsamen Teiler Q haben. Zu diesem X gibt es dann solche ganzen Zahlen $h_2, h_3, \ldots, h_X$, daß

$$\frac{k-l}{Q} + \frac{2^n-2}{Q}\,h_2 + \cdots + \frac{X^n - X}{Q}\,h_X \equiv 0 \left(\mathrm{mod.}\ \frac{A}{Q}\right)$$

und

$$0 \leqq h_\nu < \frac{A}{Q} \qquad (\nu = 2, \ldots, X)$$

ist. Es gibt weiter eine ganze Zahl h_1 $(0 \leqq h_1 < A)$, so daß

$$k - h_1 - 2\,h_2 - \cdots - X\,h_X \equiv 0 \pmod{A}$$

ist. Dann ist auch

$$l - \sum_{\nu=1}^{X} \nu^n h_\nu = k - \sum_{\nu=1}^{X} \nu\, h_\nu - \left\{k - l + \sum_{\nu=2}^{X} (\nu^n - \nu)\, h_\nu\right\} \equiv 0 - 0 = 0 \pmod{A}.$$

Es werde nun

$$(1.) \qquad \frac{1}{A}\left(k - \sum_{\nu=1}^{X} \nu\, h_\nu\right) = K, \quad \frac{1}{A}\left(l - \sum_{\nu=1}^{X} \nu^n h_\nu\right) = L$$

gesetzt. Dann sind K, L ganz und mithin $A\,K$, $A\,L$ simultan in N 1-te und n-te Potenzen

$$(2.) \qquad A\,K = \sum_{x=1}^{N} y_x, \quad A\,L = \sum_{x=1}^{N} y_x^n$$

zerfällbar, wenn k hinreichend groß und

$$i\left(k - \sum_{\nu=1}^{X} \nu\, h_\nu\right)^n < l - \sum_{\nu=1}^{X} \nu^n h_\nu < I\left(k - \sum_{\nu=1}^{X} \nu\, h_\nu\right)^n$$

ist. Diese Bedingung ist erfüllt mit

$$i\,k^n < l - \sum_{\nu=1}^{X} \nu^n h_\nu < I\,(k - X^2 A)^n;$$

diese wiederum ist erfüllt, wenn

$$i\,k^n + X^{n+1} A < l < I\,(k - X^2 A)^n$$

ist; und diese endlich ist — es werde

$$j = \frac{2\,i + I}{3}, \quad J = \frac{i + 2\,I}{3}$$

gesetzt — für alle hinreichend großen k, etwa für $k > k_1$, und für alle l erfüllt, die der Ungleichung

$$j\,k^n < l < J\,k^n$$

genügen. Unter dieser und der Kongruenzbedingung $k \equiv l \pmod{Q}$ ist also nach (1.) und (2.)

$$k = A\,K + \sum_{\nu=1}^{X} \nu\, h_\nu = \sum_{x=1}^{N} y_x + \sum_{\nu=1}^{X} h_\nu \cdot \nu = \sum_{x=1}^{M} x_x,$$

$$l = A\,L + \sum_{\nu=1}^{X} \nu^n h_\nu = \sum_{x=1}^{N} y_x^n + \sum_{\nu=1}^{X} h_\nu \cdot \nu^n = \sum_{x=1}^{M} x_x^n,$$

wobei

$$M = N + \sum_{\nu=1}^{X} h_\nu$$

ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Einige Sätze über Matrizen.

Von Herrn *R. Mehmke* in Stuttgart.

Im 4. Heft des 145. Bandes dieser Zeitschrift, S. 250—253, hat Herr *K. Böhm* einen Satz über zwei quadratische Matrizen entwickelt, von welchem der Satz über das Produkt zweier Determinanten ein besonderer Fall ist. In der folgenden Mitteilung werde ich den fraglichen *Böhm*schen Satz schrittweise verallgemeinern, um zuletzt in Nr. 5 einen Satz, der die vorhergehenden umfaßt und den ich als ein Gegenstück zu einem gewissen Satz von *Graßmann* betrachten möchte, bekannt zu geben und zu beweisen, nachdem ich ihn im Jahre 1913 für einen besonderen Fall, jedoch so, daß die allgemeine Form schon deutlich zu erkennen war, ohne Beweis veröffentlicht hatte [1]). Um eine übersichtliche Darstellung und möglichst einfache Beweise zu erzielen, verwende ich die von *Graßmann* 1862 eingeführte Symbolik, die jedoch (abgesehen von dem äußeren Produkt extensiver Größen) keineswegs als bekannt vorausgesetzt, vielmehr, wenn auch mit der gebotenen Kürze, in den Nummern 1 und 2 erläutert werden soll. Ohne die *Graßmann*sche Symbolik würde es übrigens wohl schwer halten, diesen Satz einfach zu beweisen, ja nur seinen Inhalt anschaulich zu machen.

1. Bezügliche Potenzen einer Matrix.

Betrachten wir zunächst eine einzelne quadratische Matrix

$$(1.) \qquad \mathfrak{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix},$$

die wir vorläufig als Zusammenstellung der Koeffizienten einer linearen Substitution

$$(2.) \qquad \mathfrak{x}_i' = a_{i1}\,\mathfrak{x}_1 + a_{i2}\,\mathfrak{x}_2 + \cdots + a_{in}\,\mathfrak{x}_n \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

ansehen. Wenn man n unabhängige Einheiten $e_1, e_2, \ldots, e_n$ und die beiden extensiven Größen

$$(3.) \quad x = \mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \cdots + \mathfrak{x}_n e_n, \quad x' = \mathfrak{x}_1' e_1 + \mathfrak{x}_2' e_2 + \cdots + \mathfrak{x}_n' e_n$$

einführt, so lassen sich die n Zahlengleichungen (2.) in die einzige extensive Gleichung

$$(4.) \qquad x' = \mathfrak{A}x$$

zusammenfassen, in welcher die Matrix $\mathfrak{A}$ nun als Funktionszeichen erscheint,

[1]) s. *R. Mehmke*, Vorlesungen über Punktrechnung, Erster Teilband, Leipzig 1913, (im folgenden angeführt unter „P. R. I"), S. 381, 4. Aufgabe.

nämlich als Zeichen der homogenen linearen Funktion von x, gleich welcher x' ist. $\mathfrak{A}$ hat die Eigenschaften eines Faktors und läßt sich mit jedem Zahlfaktor vertauschen; $\mathfrak{A}x$ kann das Einsetzprodukt von $\mathfrak{A}$ und x genannt werden [1]). Denkt man sich die Einheiten $e_1, e_2, \ldots, e_n$ unter dem geometrischen Bilde von n linear unabhängigen Punkten in einem linearen Raum $\bar{R}_n$ von $(n-1)$ Dimensionen, und zwar als Grundpunkte eines Systems projektiver Koordinaten, so bedeutet x' den Punkt des $\bar{R}_n$, der die Koordinaten $\mathfrak{x}_1', \mathfrak{x}_2', \ldots, \mathfrak{x}_n'$ hat und der in einer gewissen, durch (2.) oder (4.) dargestellten Kollineation dem willkürlichen Punkt x mit den Koordinaten $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n$ zugeordnet ist.

Bezeichnet y irgendeinen andern Punkt des $\bar{R}_n$, und $y' = \mathfrak{A}y$ den entsprechenden Punkt in jener Kollineation, bildet man ferner das äußere Produkt $[x'\,y'] = [\mathfrak{A}x\ \mathfrak{A}y]$, so ist dieses eine homogene lineare Funktion von x wie von y, die augenscheinlich für $y = x$ verschwindet. Deshalb ist sie auch eine homogene lineare Funktion des äußeren Produkts $[x\,y]$ [2]). Wir nehmen als Zeichen dieser Funktion $\mathfrak{A}^{\mathrm{II}}$ (zu lesen: $\mathfrak{A}$ oben zwei):

$$[\mathfrak{A}x\ \mathfrak{A}y] = \mathfrak{A}^{\mathrm{II}}\,[x\,y], \tag{5.}$$

so daß jetzt wird:

$$[x'\,y'] = \mathfrak{A}^{\mathrm{II}}\,[x\,y]. \tag{6.}$$

Diese homogene lineare Gleichung zwischen den beiden extensiven Größen zweiter Stufe $[x\,y]$ und $[x'\,y']$ — in dem benutzten geometrischen Bild ist $[x\,y]$ eine beliebige Gerade des $\bar{R}_n$, und $[x'\,y']$ die in der Kollineation $\mathfrak{A}$ ihr zugeordnete Gerade — gibt, wenn man sie in lauter Zahlengleichungen zerlegt, die lineare Substitution, deren Koeffizienten die aus Gliedern der Matrix $\mathfrak{A}$ gebildeten zweireihigen Determinanten sind, also, um beim geometrischen Bilde zu bleiben, die Substitution für Linienkoordinaten, die zur Substitution (2.) für Punktkoordinaten gehört. In der Tat, wenn $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_n$ die Koordinaten von y, und $\mathfrak{y}_1', \mathfrak{y}_2', \ldots, \mathfrak{y}_n'$ die Koordinaten von y' bezeichnen, so werden die Koordinaten von $[x\,y]$ gleich den $\binom{n}{2}$ Determinanten $(\mathfrak{x}_i\,\mathfrak{y}_k - \mathfrak{x}_k\,\mathfrak{y}_i)$ — $i, k = 1, 2, \ldots, n$ — und diejenigen von $[x'\,y']$ gleich den Determinanten $(\mathfrak{x}_i'\,\mathfrak{y}_k' - \mathfrak{x}_k'\,\mathfrak{y}_i')$, für welche man aus den Gleichungen (2.) erhält:

$$\mathfrak{x}_i'\,\mathfrak{y}_k' - \mathfrak{x}_k'\,\mathfrak{y}_i' = \sum_{l,m=1}^{n} (a_{il}\,a_{km} - a_{kl}\,a_{im})\,(\mathfrak{x}_l\,\mathfrak{y}_m - \mathfrak{x}_m\,\mathfrak{y}_l) \quad (l, m = 1, 2, \ldots, n). \tag{7.}$$

Die Matrix der linearen Substitution (7.) bezeichnen wir am einfachsten ebenfalls durch $\mathfrak{A}^{\mathrm{II}}$.

In dieser Weise fortfahrend können wir, wenn z einen beliebigen dritten Punkt des $\bar{R}_n$, und $z' = \mathfrak{A}\,z$ den in der fraglichen Kollineation ihm entsprechenden Punkt bezeichnet,

$$[x'\,y'\,z'] = \mathfrak{A}^{\mathrm{III}}\,[x\,y\,z] \tag{8.}$$

[1]) Vgl. P. R. I, S. 215. Bekanntlich kommt die Zusammenfassung der n Zahlengleichungen einer linearen Substitution für n Zahlveränderliche in eine einzige (wenn man will „symbolische") Gleichung, also der Begriff einer Matrix, wenn auch ohne den Namen, schon in der *Graßmann*schen Preisarbeit über die Theorie der Ebbe und Flut aus dem Jahr 1840 vor, erst später (1855) bei *A. Cayley*. Vgl. P. R. I, S. 316 sowie die Anmerkungen 193 und 195, S. 316—317.

[2]) Vgl. P. R. I, S. 119 Satz 2 und S. 121 Satz 3.

setzen, wo das Funktionszeichen oder die Matrix $\mathfrak{A}^{III}$ (zu lesen: $\mathfrak{A}$ oben drei) — in der Koordinatendarstellung aus den dreireihigen Unterdeterminanten der Matrix $\mathfrak{A}$ zusammengesetzt — die Transformation der Ebenen des $\bar{R}_n$ bei jener Kollineation vermittelt. Allgemein setzen wir bei m linear unabhängigen Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_m$ des $\bar{R}_n$ — $m \leqq n$ — und mit $x_i' = \mathfrak{A}\, x_i$:

$$[x_1' x_2' \cdots x_m'] = \mathfrak{A}^m [x_1 x_2 \cdots x_m]. \tag{9.}$$

So lange $m < n$ ist, bedeutet $\mathfrak{A}^m$ („$\mathfrak{A}$ oben m") ein Funktionszeichen (genauer: das Zeichen einer homogenen linearen Funktion einer extensiven Veränderlichen m-ter Stufe) oder eine Matrix; wenn aber schließlich $m = n$ wird, so geht es in eine Zahlgröße über, die offenbar gleich der Determinante oder dem Modul der Substitution (2.) ist:

$$\mathfrak{A}^n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{10.}$$

Die Matrizen $\mathfrak{A}^{II}, \mathfrak{A}^{III}, \ldots$ sind besondere Fälle der „bezüglichen" Produkte von zwei oder mehr verschiedenen Matrizen, die wir in Nr. 2 betrachten werden, sie haben deshalb die Eigenschaften von Potenzen, und wir nennen sie auch die „bezüglichen" Potenzen von $\mathfrak{A}$, zum Unterschied von den „Folgepotenzen" $\mathfrak{A}^2, \mathfrak{A}^3, \ldots$, durch welche die Wiederholungen der Substitution (2.) oder (4.) dargestellt werden [1]).

2. Bezügliche Produkte von zwei oder mehr Matrizen.

Seien jetzt $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ beliebige Matrizen derselben Art, wie die unter Nr. 1 betrachtete Matrix $\mathfrak{A}$, und $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$ wieder beliebige Größen erster Stufe, die dem Gebiet n-ter Stufe $\bar{R}_n$ angehören. Wir bilden der Reihe nach die in Summen von äußeren Produkten bestehenden Ausdrücke

$$[\mathfrak{A}x\ \mathfrak{B}y] + [\mathfrak{B}x\ \mathfrak{A}y],$$

$$[\mathfrak{A}x\ \mathfrak{B}y\ \mathfrak{C}z] + [\mathfrak{A}x\ \mathfrak{C}y\ \mathfrak{B}y] + \cdots + [\mathfrak{C}x\ \mathfrak{B}y\ \mathfrak{A}z],$$

allgemein

$$\Sigma\, [\mathfrak{A}_{i_1} x_1\ \mathfrak{A}_{i_2} x_2 \cdots \mathfrak{A}_{i_m} x_m],$$

in welch letzterer Summe für die Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_m$ der Reihe nach sämtliche Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots, m$ genommen werden sollen und $m \leqq n$ vorausgesetzt ist. Fassen wir sogleich den letzten dieser Ausdrücke, als den allgemeinsten, ins Auge, so bemerken wir, daß er homogen und linear in bezug auf jede der m Größen erster Stufe $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ist und jedesmal verschwindet, wenn man irgend zwei von ihnen einander gleich setzt. Deshalb ist er nach dem schon in Nr. 1 benutzten Satz eine homogene lineare Funktion des äußeren Produkts $[x_1 x_2 \ldots x_m]$ jener Größen. Es ist zweckmäßig, die Anzahl der Glieder des Ausdrucks — also $m!$, falls $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$ alle von einander verschieden sind — als Faktor herauszusetzen. Die dann sich ergebende homogene lineare Funktion des Arguments

[1]) *H. Graßmann,* der die Wiederholungen nicht in Betracht zog, bezeichnete die bezüglichen Potenzen durch $[\mathfrak{A}^2], [\mathfrak{A}^3], \ldots$. Die Benennung Folgeprodukt für die Substitution, die gewöhnlich schlechtweg das Produkt zweier Substitutionen genannt wird, stammt von *H. Graßmann* dem Jüngeren.

$[x_1\, x_2 \ldots x_m]$ bezeichnen wir durch Nebeneinanderschreiben der Matrizen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$ und Einschließen in eckige Klammern, so daß die Gleichung besteht:

$$(11.)\quad \Sigma\,[\mathfrak{A}_{i_1} x_1\ \mathfrak{A}_{i_2} x_2 \cdots \mathfrak{A}_{i_m} x_m] = m!\ [\mathfrak{A}_1\, \mathfrak{A}_2 \cdots \mathfrak{A}_m]\,[x_1\, x_2 \cdots x_m].$$

(Wenn $m < n$ ist, bedeutet hier also die rechte Seite, abgesehen von dem Zahlfaktor $m!$, das Einsetzprodukt des linearen Funktionszeichens oder der Matrix $[\mathfrak{A}_1\, \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_m]$ und der extensiven Größe m-ter Stufe $[x_1\, x_2 \ldots x_m]$. Für $m = n$ dagegen wird die linke Seite wie das äußere Produkt $[x_1\, x_2 \ldots x_m]$ eine Zahlgröße, weshalb dann auch der Ausdruck $[\mathfrak{A}_1\, \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_m]$ eine Zahlgröße vorstellt und das Einsetzprodukt in das gewöhnliche arithmetische oder algebraische Produkt übergeht.)

Für zwei Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sowie für drei Matrizen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ hat man insbesondere:

$$[\mathfrak{A}x\ \mathfrak{B}y] + [\mathfrak{B}x\ \mathfrak{A}y] = 2\,[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]\,[x\,y],$$

$$[\mathfrak{A}x\ \mathfrak{B}y\ \mathfrak{C}z] + [\mathfrak{A}x\ \mathfrak{C}y\ \mathfrak{B}z] + \cdots + [\mathfrak{C}x\ \mathfrak{B}y\ \mathfrak{A}z] = 6\,[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]\,[x\,y\,z],$$

wo geometrisch die Matrix $[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]$ eine lineare Substitution für Linienkoordinaten, die Matrix $[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]$ eine lineare Substitution für Ebenenkoordinaten bedeutet.

Die linke Seite von (11.) ist homogen und linear in bezug auf jede der Matrizen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$. Daher ist die neue Matrix $[\mathfrak{A}_1\, \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_m]$ eine homogene lineare und folglich distributive Funktion der gegebenen Matrizen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$, weshalb jene Matrix als ein Produkt dieser Matrizen anzusprechen ist. Wir nennen es mit *Graßmann* ihr bezügliches Produkt. Wird $m = n$, so erhält man, wie schon erwähnt, eine Zahlgröße statt einer eigentlichen Matrix. Wie leicht zu sehen, ist sie eine Summe von $n!$ Determinanten, die sich ergeben, wenn man auf alle möglichen Weisen den n Gleichungen der in Koordinatenform geschriebenen linearen Substitutionen, die zu einer jeden der n gegebenen Matrizen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ gehören, je eine Gleichung entnimmt — aber so, daß die Ordnungsnummern der ausgewählten Gleichungen alle verschieden sind — und die Koeffizienten dieser n Gleichungen zu einer Determinante zusammenstellt.

Wenn man die Reihenfolge der Matrizen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$ irgendwie ändert, so vertauschen sich nur die Glieder der linken Seite von (11.) unter einander, mithin bleibt die rechte Seite wie die Gesamtheit der Glieder der linken ungeändert, oder das bezügliche Produkt mehrerer Matrizen ist kommutativ.

Setzt man die Matrizen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$ alle einander gleich:

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \cdots = \mathfrak{A}_m = \mathfrak{A},$$

so werden auch die Glieder der linken Seite von (11.) einander gleich und man erhält:

$$[\mathfrak{A}\,x_1\ \mathfrak{A}\,x_2 \ldots\ \mathfrak{A}\,x_m] = [\mathfrak{A}\,\mathfrak{A} \ldots\ \mathfrak{A}]\,[x_1\, x_2 \ldots x_m].$$

Wegen Gleichung (9.) ist aber

$$[\mathfrak{A}x_1\, \mathfrak{A}x_2 \ldots\, \mathfrak{A}x_m] = \mathfrak{A}^n\,[x_1\, x_2 \ldots\, x_m],$$

folglich gilt

$$(12.)\qquad \mathfrak{A}^m = [\mathfrak{A}\ \mathfrak{A} \ldots\ \mathfrak{A}],$$

d. h. die unter Nr. 1 eingeführte Matrix $\mathfrak{A}^m$ erscheint, wie am Schluß von Nr. 1 schon angedeutet wurde, als das bezügliche Produkt von m gleichen Matrizen je gleich $\mathfrak{A}$, oder $\mathfrak{A}^m$ darf die bezügliche m-te Potenz von $\mathfrak{A}$ genannt werden. Insbesondere ist $\mathfrak{A}^n$, die bezügliche n-te Potenz der Matrix $\mathfrak{A}$, gleich der zugehörigen Determinante.

3. Erste Verallgemeinerung des Determinantensatzes von Böhm.

Denken wir uns mit einer und derselben n-reihigen Matrix $\mathfrak{A}$ der Reihe nach n ebensolche Matrizen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_n$ zusammengesetzt, was die Matrizen $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_n$ liefern möge:

(13.) $$\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A},\ \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{B}_2 \mathfrak{A}, \ldots \mathfrak{C}_n = \mathfrak{B}_n \mathfrak{A}\ ^{1}).$$

Bezeichnen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n beliebige, aber linear unabhängige Größen erster Stufe im Gebiet $\bar{R}_n$, so ist nach der Erklärung des bezüglichen Produkts mehrerer Matrizen in Nr. 2 (11.):

(14.) $$n!\,[\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{C}_n]\,[x_1 x_2 \ldots x_n] = \Sigma\,[\mathfrak{C}_{i_1} x_1\ \mathfrak{C}_{i_2} x_2 \ldots \mathfrak{C}_{i_n} x_n],$$

wo man für die Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_n$ nach und nach sämtliche $n!$ Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ zu nehmen hat. Setzt man aber

(15.) $$[\mathfrak{A} x_i] = x_i',$$

so wird

$$\mathfrak{C}_k x_i = (\mathfrak{B}_k \mathfrak{A})\, x_i = \mathfrak{B}_k\,(\mathfrak{A} x_i) = \mathfrak{B}_k x_i',$$

mithin

(16.) $$n!\,[\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{C}_n]\,[x_1 x_2 \ldots x_n] = \Sigma\,[\mathfrak{B}_{i_1} x_1'\ \mathfrak{B}_{i_2} x_2' \ldots \mathfrak{B}_{i_n} x_n'].$$

Für die rechte Seite dieser Gleichung kann man zufolge der Erklärung in Nr. 2 (11.) schreiben:

$$n!\,[\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_n]\,[x_1' x_2' \ldots x_n'].$$

Es ist aber wegen (15.) und (9.):

$$[x_1' x_2' \ldots x_n'] = [\mathfrak{A} x_1\ \mathfrak{A} x_2 \ldots \mathfrak{A} x_n] = \mathfrak{A}^n\,[x_1 x_2 \ldots x_n].$$

Setzt man diese Ausdrücke in (16.) ein, so kommt nach Weglassen des von Null verschiedenen Zahlfaktors $[x_1 x_2 \ldots x_n]$:

$$[\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{C}_n] = [\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_n]\,\mathfrak{A}^n,$$

oder wenn für $\mathfrak{C}_i$ wieder $\mathfrak{B}_i \mathfrak{A}$ geschrieben wird:

(17.) $$[\mathfrak{B}_1 \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}_2 \mathfrak{A} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{B}_n \mathfrak{A}] = [\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_n]\,\mathfrak{A}^n.$$

In Worten: Das bezügliche Produkt der durch Zusammensetzen von n beliebigen (n-reihigen quadratischen) Matrizen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_n$ mit einer und derselben Matrix $\mathfrak{A}$ gleicher Art sich ergebenden Matrizen $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}, \mathfrak{B}_2 \mathfrak{A}, \ldots, \mathfrak{B}_n \mathfrak{A}$ ist gleich dem arithmetischen Produkt aus dem bezüglichen Produkt der n Matrizen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \ldots, \mathfrak{B}_n$ und der Determinante $\mathfrak{A}^n$, die zur Matrix $\mathfrak{A}$ gehört.

Der in der Einleitung erwähnte Satz des Herrn *Böhm* ergibt sich, wenn man von den Matrizen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_n$ eine beliebige Anzahl, z. B. die k ersten, einander gleich annimmt:

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2 = \cdots = \mathfrak{B}_k = \mathfrak{B},$$

und die übrigen durch die sog. Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ ersetzt, für welche bei unserer Auffassung der Matrizen als Funktionszeichen auch die gewöhnliche 1 geschrieben werden darf:

$$\mathfrak{B}_{k+1} = \mathfrak{B}_{k+2} = \cdots = \mathfrak{B}_n = \mathfrak{E} = 1.$$

Mit unseren Bezeichnungen erhält er die Form:

$$[(\mathfrak{B}\mathfrak{A})^k\, \mathfrak{A}^{n-k}] = [\mathfrak{B}^k\, \mathfrak{E}^{n-k}]\,\mathfrak{A}^n,$$

---

[1]) Beim Zusammensetzen oder Bilden des Folgeprodukts von Matrizen schreibe ich (entsprechend der Auffassung der Matrizen als Funktionszeichen) die Faktoren von rechts nach links, wie es *Hamilton*, *Cayley*, *Peano*, *Gibbs* und andere getan haben.

wo also statt

$$[\mathfrak{B}^{\underline{k}}\,\mathfrak{E}^{\underline{n-k}}] \text{ auch } [\mathfrak{B}^{\underline{k}}\,1^{\underline{n-k}}]$$

geschrieben werden könnte [1]).

Wählt man $k = n$, so kommt der Multiplikationssatz der Determinanten in der Form

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{A})^{\underline{n}} = \mathfrak{B}^{\underline{n}}\,\mathfrak{A}^{\underline{n}}$$

zum Vorschein.

4. Weitere Verallgemeinerung.

Statt wie in Nr. 3 das bezügliche Produkt von n Matrizen $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots$ zu bilden, die durch Zusammensetzen von n Matrizen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ mit einer und derselben Matrix $\mathfrak{A}$ entstanden sind, kann man deren auch eine kleinere Anzahl, z. B. m, zu ihrem bezüglichen Produkt verbinden. Es ergibt sich dann mit den Bezeichnungen der Nr. 3:

$$\begin{aligned} m!\,[\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{C}_m]\,[x_1\,x_2 \ldots x_m] &= \Sigma\,[\mathfrak{C}_{i_1} x_1\,\mathfrak{C}_{i_2} x_2 \ldots \mathfrak{C}_{i_m} x_m] \\ &= \Sigma\,[\mathfrak{B}_{i_1} x'_1\,\mathfrak{B}_{i_2} x'_2 \ldots \mathfrak{B}_{i_m} x'_m] \\ &= m!\,[\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_m]\,[x_1\,x'_2 \ldots x'_m] \\ &= m!\,[\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_m]\,\mathfrak{A}^{\underline{m}}\,[x_1\,x_2 \ldots x_m] \end{aligned}$$

oder

$$[\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{C}_m]\,[x_1\,x_2 \ldots x_m] = [\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_m]\,\mathfrak{A}^{\underline{m}}\,[x_1\,x_2 \ldots x_m].$$

Da diese Gleichung immer gilt, welche Größe m-ter Stufe des Gebiets $\overline{R}_n$ man auch statt $[x_1\,x_2 \ldots x_m]$ als Argument links und rechts in die dort stehenden homogenen linearen Funktionen einsetzen mag, so sind diese beiden Funktionen identisch, oder es besteht Gleichheit zwischen den zugehörigen Funktionszeichen

$$[\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{C}_m] = [\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_m]\,\mathfrak{A}^{\underline{m}},$$

d. h. man erhält

$$(18.) \qquad [\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}_2\mathfrak{A}\cdot \ldots \cdot \mathfrak{B}_m\mathfrak{A}] = [\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_m]\,\mathfrak{A}^{\underline{m}}.$$

Wenn tatsächlich $m < n$ ist, so bemerkt man gegen (17.) den Unterschied, daß in (18.) die beiden Glieder rechts keine Zahlgrößen sondern Matrizen bedeuten, sowie daß man rechts kein arithmetisches Produkt sondern ein Folgeprodukt oder die Zusammensetzung zweier Matrizen vor sich hat.

5. Allgemeinste Form des Satzes.

In dem durch (17.) dargestellten Satz und dem allgemeineren der Gleichung (18.) wird ein bezügliches Produkt von mehreren Folgeprodukten je zweier Matrizen durch bezügliche Produkte einzelner Matrizen ausgedrückt. Es besteht aber eine Besonderheit insofern, als jene Folgeprodukte einen gemeinsamen Faktor haben, die Matrix $\mathfrak{A}$ nämlich. Um dem Satz die allgemeinste Form zu geben, deren er unter Beschränkung auf zwei Faktoren bei den Folgeprodukten fähig ist, kann man folgenden Weg einschlagen: Man ersetze in (18.) nach Vertauschen der linken und rechten Seite die Matrix $\mathfrak{A}$, die ja beliebig ist, durch $\mathfrak{A}_1 + l\,\mathfrak{A}_2$, wo l eine unbestimmte, veränderliche Zahlgröße bezeichnen soll, entwickle in Gedanken nach

[1]) Herr *Böhm* wendet bei seinen Entwicklungen unter anderm den Taylorschen Satz an, wo bei unserer Darstellung der binomische Satz genügen würde, weil die betreffenden Ausdrücke (bezügliche) Potenzen oder Produkte solcher sind.

Potenzen von $\mathfrak{l}$, entferne die von $\mathfrak{l}$ freien Glieder durch wiederholte Anwendung von (18.) und gehe zur Grenze $\mathfrak{l} = 0$ über. Es kommt z. B. im Fall $m = 2$:

$$(19.)\quad 2\,[\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2]\,[\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2] = [\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{B}_2\,\mathfrak{A}_2] + [\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{A}_2 \cdot \mathfrak{B}_2\,\mathfrak{A}_1]\ ^{1}).$$

Ferner im Fall $m = 3$, wenn man das Verfahren zweimal anwendet, aber das zweite Mal $\mathfrak{A}_1$ durch $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{l}\,\mathfrak{A}_3$ ersetzt:

$$(20.)\quad 6\,[\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3]\,[\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{A}_3] = [\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{B}_2\,\mathfrak{A}_2 \cdot \mathfrak{B}_3\,\mathfrak{A}_3] + [\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{B}_2\,\mathfrak{A}_3 \cdot \mathfrak{B}_3\,\mathfrak{A}_2] + \cdots + [\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{A}_3 \cdot \mathfrak{B}_2\,\mathfrak{A}_2 \cdot \mathfrak{B}_3\,\mathfrak{A}_1].$$

Allgemein ergibt sich, wenn man das Verfahren genügend oft wiederholt:

$$(21.)\quad m!\,[\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_m]\,[\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_m] = \Sigma\,[\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{A}_{i_1} \cdot \mathfrak{B}_2\,\mathfrak{A}_{i_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{B}_m\,\mathfrak{A}_{i_m}],$$

wo in der Summe rechts für die Reihe der Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_m$ nach und nach alle Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots, m$ zu nehmen sind. (Zu demselben Ergebnis würde man gelangen, wenn man in (18.) beiderseits wiederholt nach $\mathfrak{A}$ „symbolisch" differenzierte und das Differential $d\,\mathfrak{A}$ jedesmal durch eine beliebige neue Matrix ersetzte.)

Es werde daran erinnert, daß man, wenn $m < n$ ist, auf der linken Seite das Folgeprodukt zweier bezüglichen Produkte von Matrizen hat, während auf der rechten Seite in jedem Glied der Summe das bezügliche Produkt von m Folgeprodukten aus je zwei Matrizen steht. Für $m = n$ erhält man links statt des Folgeprodukts ein arithmetisches Produkt von Zahlgrößen, und rechts werden aus den einzelnen Gliedern ebenfalls Zahlgrößen.

Man könnte auch zu Folgeprodukten mit mehr als zwei Faktoren fortschreiten, ohne Schwierigkeiten zu begegnen.

Der durch (21.) dargestellte Satz wurde in der Einleitung als ein Gegenstück zu einem Satz von *Graßmann* bezeichnet. Es ist der Satz in Nr. 175 der „Ausdehnungslehre" von 1862 (Werke I 2, S. 135—136) gemeint [2]). Abgesehen von dem Zahlfaktor $m!$, der in (21.) auftritt, besteht in der Tat eine große Ähnlichkeit, aber dort handelt es sich um innere Produkte, insbesondere links um das innere Produkt zweier äußeren Produkte von je m Größen erster Stufe, hier dagegen um Folgeprodukte, und während dort das innere Produkt zweier Größen m-ter Stufe in eine Determinante entwickelt wird, setzt sich die Summe auf der rechten Seite von (21) zwar auch aus den Gliedern einer gewissen Determinante zusammen, aber die Glieder sind nicht abwechselnd durch + und − verbunden, sondern haben alle das Vorzeichen +. Den Grund für diesen Unterschied wird man unschwer darin erkennen, daß die Faktoren eines äußeren Produkts von extensiven Größen erster Stufe nur mit Zeichenwechsel vertauscht werden dürfen, während das bezügliche Produkt von Matrizen kommutativ ist.

---

[1]) Dies ist der Satz, den zu beweisen und auf zweimal drei Matrizen auszudehnen in P. R. I, S. 381, als Aufgabe 4 gestellt war.

[2]) Er besagt, daß, unter $a_1, a_2, \ldots, a_m;\ b_1, b_2, \ldots, b_m$ Größen erster Stufe verstanden und mit $|$ als Zeichen des inneren Produkts,

$$[a_1\,a_2 \ldots a_m]\,|\,[b_1\,b_2 \ldots b_m] = \begin{vmatrix} a_1\,|\,b_1 & a_2\,|\,b_1 \ldots a_m\,|\,b_1 \\ a_1\,|\,b_2 & a_2\,|\,b_2 \ldots a_m\,|\,b_2 \\ \vdots & \\ a_1\,|\,b_m & a_2\,|\,b_m \ldots a_m\,|\,b_m \end{vmatrix}.$$

Die Siebenteilung der lemniskatischen Funktion sin am (u).

Von Herrn *K. Schwering* in Köln.

Vor längerer Zeit habe ich über die Multiplikation und Division der lemniskatischen Funktion sin am u Untersuchungen angestellt, die hauptsächlich in drei größeren Aufsätzen veröffentlicht sind; dieses Journal Bd. 107, 110, 111. Eine Anfrage des Herrn *Schlesinger* veranlaßte mich, auf diese meine weit zurückliegenden Arbeiten zurückzukommen. Es handelte sich um eine im Nachlaß von *Gauß* unvollständig mitgeteilte Formel, welche die Aufgabe der Multiplikation für die Zahl 7 löst. Diese Formel zu entwickeln und ihre Richtigkeit zu bestätigen, war nach meinen früheren Untersuchungen nicht schwer. Allein neben der Multiplikation mit 7 verdient die ungleich schwierigere Aufgabe der Division durch 7 eingehendere Behandlung. In meinen veröffentlichten Arbeiten war mein Absehen vorwiegend der komplexen Multiplikation und Division zugewandt, also der Vervielfachung und Teilung, soweit reelle Primzahlen von der Form $4n + 1$ in Frage kommen. Ich nahm jetzt Veranlassung, an dem Beispiele der Siebenteilung die Durchführbarkeit meiner Behandlungsweise auch für die reellen Primzahlen $4n + 3$ zu zeigen. Eine gedrängte Übersicht der Hauptsätze schicke ich voraus.

§ 1. Bezeichnungen und Hauptsätze.

Es sei:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

Dann wird der Zusammenhang zwischen x und u nach den *Jacobi*schen Bezeichnungen auch durch die Gleichungen ausgedrückt:

$$x = \operatorname{sin\,am}\, u, \quad \sqrt{1 - x^2} = \operatorname{cos\,am}\, u, \quad \sqrt{1 + x^2} = \Delta\operatorname{am}\, u;$$

die Quadratwurzeln erhalten für kleine Werte von u das positive Vorzeichen. Für $x = \operatorname{sin\,am}\, u$, $y = \operatorname{sin\,am}\, v$ lautet das Additionstheorem:

$$\operatorname{sin\,am}\,(u + v) = \frac{x\sqrt{1 - y^4} + y\sqrt{1 - x^4}}{1 + x^2 y^2}.$$

Wir setzen weiter für $x = 1$ den auf geradlinigem Wege gewonnenen Wert des Integrals gleich K. Dann hat sin am u die Grundperioden $4K$ und $2K + 2Ki$. Der Zahlwert ist $K = 1{,}311029$. Für die Darstellung in den ϑ-Reihen ergibt sich:

$$\text{sin am } u = \frac{2\,q^{\frac{1}{4}} \sin v - 2\,q^{\frac{9}{4}} \sin 3\,v + 2\,q^{\frac{25}{4}} \sin 5\,v - \cdots}{1 + 2\,q \cos 2\,v + 2\,q^4 \cos 4\,v + 2\,q^9 \cos 6\,v + \cdots},$$

$$q = e^{-\pi} = 0,\ 0\,4\,3\ 2\,1\,3\,9\,1,\ \log q = 0,\ 6\,3\,5\ 6\,2\,3\ 6\,4\,6 - 2,$$

$$v = \frac{u\,\pi}{2\,K}.$$

Die Zahl q steht in einfachem Zusammenhang mit dem Hauptwert des Ausdrucks $i^i = e^{-\frac{1}{2}\pi}$. Die Werte $e^{-\pi}$, $e^{-\frac{1}{2}\pi}$, $e^{-\frac{1}{4}\pi}$ sind von *Gauß* (Werke III 428, 430, 432) auf viele Stellen berechnet. Der Charakter der Zahl $e^{-\pi}$ ist noch unbekannt. Durch Reihenentwicklung ergibt sich:

(1.) $$\text{sin am } (u\,i) = i \text{ sin am } u.$$

Dann ergibt sich aus dem Additionstheorem:

(2.) $$\text{sin am } (u + u\,i) = \text{sin am } (1 + i)\,u = \frac{(1 + i)\,x}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

Bildet man die Summen:

$$\text{sin am } (a + b\,i) + i \text{ sin am } (a\,i + b) = \frac{2\,\beta\,i\sqrt{1 - \alpha^4}}{1 - \alpha^2\,\beta^2};$$

$$i \text{ sin am } (a + b\,i) + \text{sin am } (a\,i + b) = \frac{2\,\alpha\,i\sqrt{1 - \beta^4}}{1 - \alpha^2\,\beta^2},$$

$$\alpha = \text{sin am } a,\ \beta = \text{sin am } b,$$

so ergibt sich durch Division

$$\frac{i \text{ sin am } (a + b\,i) + \text{sin am } (a\,i + b)}{\text{sin am } (a + b\,i) + i \text{ sin am } (a\,i + b)} = \frac{\text{sin am } (1 + i)\,a}{\text{sin am } (1 + i)\,b}.$$

Nun setzen wir:

$$(1 + i)\,a = \tau\,u,\ (1 + i)\,b = u,\ \tau + i = (1 + i)\,\sigma,\ \tau\,i + 1 = (1 + i)\,\varrho.$$

Dann ist $(a + b\,i)(1 + i) = (\tau + i)\,u$; $(a\,i + b)(1 + i) = (\tau\,i + 1)\,u$, also:

(3.) $$\frac{\text{sin am } \tau\,u}{\text{sin am } u} = \frac{\text{sin am } \varrho\,u + i \text{ sin am } \sigma\,u}{i \text{ sin am } \varrho\,u + \text{sin am } \sigma\,u}.$$

Diese Formel bildet die Grundlage der von mir entwickelten Lehre. Bei diesem Ausgange gelangt man am einfachsten zu allen die Vervielfachung und Teilung behandelnden Sätzen. Sie spielt auf diesem Gebiete gewissermaßen die Rolle der Gleichung $x^m\,x^n = x^{m+n}$.

Die Zahlen τ, ϱ, σ bilden eine Dreiheit mit bemerkenswerten Eigenschaften. Aus ihrer Erklärung folgt:

(4). $$\varrho + \sigma = \tau + 1;\ 2\,\varrho\,\sigma = \tau^2 + 1;\ \varrho\varrho' + \sigma\sigma' = \tau\tau' + 1,$$

wo ϱ', σ', τ' die zu ϱ, σ, τ konjugierten Werte bezeichnen. Aus der letzten Gleichung folgt, daß $\varrho\varrho'$ und $\sigma\sigma'$ jedes für sich kleiner sind als $\tau\tau'$. Die Gleichung (3.) ist also eine wahre Multiplikationsgleichung; sie führt die Multiplikation mit τ auf die gleiche Aufgabe für Zahlen ϱ, σ mit kleineren Normen $\varrho\varrho'$ und $\sigma\sigma'$ zurück.

Die Dreiheiten τ, ϱ, σ haben eine noch größere Bedeutung für die Teilung der lemniskatischen Funktion. Sei die Teilungsaufgabe für die Primzahl η mit der Norm $\eta\eta' = q$ zu lösen, so ordnet man die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, q - 1$ in Dreiheiten τ, ϱ, σ. Die letzteren gehen aus den Zahlen τ hervor und durchlaufen mit ihnen Restsysteme mod q. Dabei sind $\tau \equiv \pm 1$ und $\tau \equiv \pm i$ auszuschließen. Ist

$q = 8m + 5$, so erhalten wir m Gruppen von je 8 Dreiheiten; ist $q = 8m + 1$, so erhalten wir gleichfalls m Gruppen; aber eine von ihnen enthält nur 4, jede der übrigen 8 Dreiheiten. Aus jeder Gruppe entspringt eine Gleichung unter den Wurzeln der Teilungsgleichung. Diese so gewonnenen Wurzelbeziehungen lassen sich nicht durch lineare Umbildung oder durch Verschiebung der Zeiger aufeinander zurückführen. Sie ermöglichen die Bildung der Resolventen und damit die Lösung der Teilungsgleichung. Für die Fälle $q = 13, 17, 29$ habe ich vorstehende Sätze in vollständiger Entwicklung angewandt. Auch für $q = 37, 41, 53, 101$ habe ich einige Ergebnisse mitgeteilt (dieses Journal Bd. 111, S. 182 fgde.).

Setzt man sin am $(7u) = 0$, so erhält man die Lösung $7u = 2hK + 2h'Ki$, wo h und h' irgendwelche reelle oder komplexe ganze Zahlen sind. Wie ich Bd. 107, S. 201 gezeigt habe, kann man die Lösungen zurückführen auf die der Gleichung $7u = 4rK$ entspringenden, indem man r ein vollständiges Restgefüge der komplexen Zahlen mod 7 durchlaufen läßt. Schließt man 0 aus, so ergibt das 48 ganze Zahlen, die man am leichtesten als Potenzen einer primitiven Wurzel darstellt, etwa $g = -1 + 2i$. Das Ergebnis ist:

$$\left.\begin{array}{llll} g = -1+2i, & g^2 \equiv -3+3i, & g^3 \equiv -3-2i, & g^4 \equiv 3i, \\ g^5 \equiv 1-3i, & g^6 \equiv -2-2i, & g^7 \equiv -1-2i, & g^8 \equiv -2, \\ g^9 \equiv 2+3i, & g^{10} \equiv -1+i, & g^{11} \equiv -1-3i, & g^{12} \equiv i \end{array}\right\} \bmod 7.$$

Da $g^{12} \equiv i$, $g^{24} \equiv -1$, $g^{36} \equiv -i$, so ist es leicht, das ganze Restgefüge aufzustellen. Um alle Wurzeln der Teilungsgleichung zu bilden, führen wir die Bezeichnung ein:

$$(5.) \qquad \delta_n = \text{sin am } \frac{4rg^nK}{7}.$$

Ohne der Allgemeinheit zu schaden, kann man auch $r = 1$ nehmen. Man kann auch schreiben:

$$\delta_{\text{ind}\,\tau} = \text{sin am } \frac{4\tau K}{7},$$

wenn τ eine beliebige nicht durch 7 teilbare komplexe Zahl ist. Demnach würde man statt (5.) auch setzen dürfen:

$$(6.) \qquad \delta_{n+\text{ind}\,r} = \text{sin am } \frac{4rg^nK}{7}.$$

Diese Gleichung ermöglicht die Verschiebung der Zeiger in den aus (3.) hervorgehenden Gleichungen. Gehen wir nun zur Bildung der Dreiheiten τ, ϱ, σ über. Man findet:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
$\tau =$	$-1+2i$;	$-3-4i$;	$-3-2i$;	$3i$;	$5-2i$;	$6+i$,
$\varrho =$	-1 ;	$1-4i$;	$-3i$;	$-1+i$;	$4+i$;	$3+3i$,
$\sigma =$	$1+2i$;	-3 ;	$-2+i$;	$2+2i$;	$2-3i$;	$4-2i$.

Für sie bestehen die Gleichungen (4.); z. B. für die erste Dreiheit:

$$\varrho + \sigma = \tau + 1; \quad 2\varrho\sigma = \tau^2 + 1; \quad \varrho\varrho' + \sigma\sigma' = \tau\tau' + 1$$
$$= 2i \qquad = -2-4i \qquad = 6.$$

Setzen wir in (3.) für u den Wert $\frac{4g^nK}{\eta}$ ein, so folgt allgemein:

$$(7.) \qquad \frac{\delta_{\text{ind}\,\tau}}{\delta_0} = \frac{\delta_{\text{ind}\,\varrho} + i\,\delta_{\text{ind}\,\sigma}}{i\,\delta_{\text{ind}\,\varrho} + \delta_{\text{ind}\,\sigma}}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich eine solche für die Produkte, und zwar gehen aus (7.) für unsere 6 Dreiheiten τ, ϱ, σ folgende 6 Gleichungen hervor:

$$(8.) \quad \begin{aligned} &1)\ \delta_0^2 + i\,\delta_0\,\delta_7 = i\,\delta_0\,\delta_1 + \delta_1\,\delta_7.\\ &2)\ -i\,\delta_2\,\delta_{11} + i\,\delta_4\,\delta_2 = -\delta_0\,\delta_{11} - \delta_0\,\delta_4.\\ &3)\ \delta_3\,\delta_4 + \delta_3\,\delta_7 = -i\,\delta_0\,\delta_4 + i\,\delta_0\,\delta_7.\\ &4)\ i\,\delta_4\,\delta_{10} - \delta_4\,\delta_6 = \delta_0\,\delta_{10} - i\,\delta_0\,\delta_6.\\ &5)\ \delta_6\,\delta_{11} + i\,\delta_3\,\delta_6 = -i\,\delta_0\,\delta_{11} - \delta_0\,\delta_3.\\ &6)\ \delta_2\,\delta_{10} + \delta_3\,\delta_{10} = -i\,\delta_0\,\delta_2 + i\,\delta_0\,\delta_3. \end{aligned}$$

Aus jeder dieser 6 Gleichungen gehen durch Division solche für die Quotienten hervor. Aus der ersten entspringen zwei wesentlich verschiedene Beziehungen unter den Quotienten durch Division mit $\delta_0\,\delta_1$ und $\delta_0\,\delta_7$. Ebenso ist es bei den übrigen; nur die vierte Gleichung, die der Ausnahmegruppe entstammt, liefert nach Division nur eine Gleichung unter den Quotienten. Im ganzen erhält man also 11 Gleichungen unter den Quotienten.

Hätte man für das Argument u bei der Einsetzung in (3.) den Wert $u = \frac{4\,r\,g^n\,K}{7}$ genommen, so würden alle Zeiger um ind r vergrößert sein. Folglich geht aus jeder der bisher abgeleiteten Gleichungen eine neue hervor, indem man jeden Zeiger um eine gleiche ganze positive Zahl vermehrt. Beachtet man, daß $g^{12} \equiv i$ und $\sin\text{am}\,(u\,i) = i \sin\text{am}\,u$, so folgt, daß aus jeder Gleichung nur 11 neue entstehen können. Aus diesen Gleichungen gehen durch Multiplikation mit geeigneten Einheitswurzeln die Resolventen hervor. Bevor wir sie bilden, müssen wir zuerst die Teilungsgleichung betrachten, deren Wurzeln die δ sind.

§ 2. Die Teilungsgleichung.

Sei η eine ungerade primitive Zahl, also der imaginäre Teil gerade und $\eta - 1$ durch $(1+i)^3$ teilbar, ihre Norm sei $\eta\,\eta' = q$. Sei $q = 4\,\mu + 1$, $x = \sin\text{am}\,u$ und

$$\varphi\,(x^4) = x^{q-1} + a_1\,x^{q-5} + a_2\,x^{q-9} + \cdots + a_\mu;$$
$$\chi\,(x^4) = 1 + a_1\,x^4 + a_2\,x^8 + \cdots + a_\mu\,x^{q-1},$$

also

$$\chi\,(x^4) = x^{4\mu}\,\varphi\Big(\frac{1}{x^4}\Big).$$

Dann ist

$$\sin\text{am}\,(\eta\,u) = x\,\frac{\varphi\,(x^4)}{\chi\,(x^4)}.$$

Es ist $a_\mu = \eta$. Die Bezeichnung des Arguments ist entbehrlich. Wir dürfen und werden schreiben:

$$(9.) \qquad \sin\text{am}\,(\eta\,u) = x\,\frac{\varphi_\eta}{\chi_\eta}.$$

Für $\eta = -1 + 2\,i$ ist $\varphi\,(x^4) = x^4 - 1 + 2\,i = \varphi_{-1+2i}$,
$\chi\,(x^4) = 1 + (-1+2\,i)\,x^4 = \chi_{-1+2i}$.
Für $\eta = -3$ ist $\varphi\,(x^4) = x^8 + 6\,x^4 - 3 = \varphi_{-3}$,
$\chi\,(x^4) = 1 + 6\,x^4 - 3\,x^8 = \chi_{-3}$.

Der Gleichung (3.) entnehmen wir sofort die Multiplikationsformeln:

$$(1+i)\,\varphi_\tau = \varphi_\varrho\,\chi_\sigma + i\,\varphi_\sigma\,\chi_\varrho,$$
$$(1+i)\,\chi_\tau = i\,\varphi_\varrho\,\chi_\sigma + \varphi_\sigma\,\chi_\varrho.$$

Der Faktor $1+i$ links ergibt sich durch Vergleichung der höchsten Potenzen. Eine zweite Art, sin am $(\tau\,u)$ zu berechnen, habe ich a. a. O. 107, S. 233 gegeben; ich entnehme für die 7:

$$\varphi_{-7} - 2\,\Phi_4^2\,\varphi_{-3}^2 + \varphi_{-3+4i}\,\varphi_{-3-4i} = 0.$$

Endlich folgt aus dem Additionstheorem:

$$\text{sin am}\,(u+v)\,\text{sin am}\,(u-v) = \frac{x^2-y^2}{1+x^2\,y^2}.$$

Ersetzen wir u durch $(p+1)\,u$, v durch $p\,u$, so erhält man links

$$\text{sin am}\,u\,\text{sin am}\,(2\,p+1)\,u$$

und rechts statt x und y die Werte sin am $(p+1)\,u$ und sin am $(p\,u)$. Wie sich aus dem Nachlaß ergibt, hat *Gauß* gerade diesen Weg zur Berechnung von sin am $(7\,u)$ eingeschlagen. Nach meinen Formeln a. a. O. 111, S. 171 ist:

$$\Phi_2 = 1+x^4,\ \Phi_3 = 1-6\,x^4+x^8,\ \Phi_4 = 1+20\,x^4-26\,x^8+20\,x^{12}+x^{16},$$
$$\varphi_{-7} = \varphi_{-3}^2\,\Phi_4^2 - 16\,(1-x^4)\,\Phi_2^2\,\Phi_3^2\,\chi_{-3}^2.$$

Es ist

$$\text{sin am}\,(4\,u) = 4\,x\,\frac{\Phi_2\,\Phi_3}{\Phi_4}\sqrt{1-x^4}.$$

Setzen wir nun:

$$\varphi_{-7} = x^{48} + a_1\,x^{44} + a_2\,x^{40} + \cdots + a_{12}, \tag{10.}$$

so ergibt sich:

$$a_1 = 196 = 7^2\cdot 4,\ a_2 = -1302 = -7\cdot 186,\ a_3 = 14756 = 7\cdot 2108,$$
$$a_4 = -15673 = -7\cdot 2239,\ a_5 = -42168 = -7\cdot 6024,$$
$$a_6 = 111916 = 7\cdot 15988,\ a_7 = -82664 = -7\cdot 11752,$$
$$a_8 = 35231 = 7\cdot 5033,\ a_9 = -19852 = -7\cdot 2836,$$
$$a_{10} = 2954 = 7\cdot 422,\ a_{11} = 308 = 7\cdot 44,\ a_{12} = -7.$$

Um die Übereinstimmung mit den allgemeinen Formeln zu sichern, ist φ mit dem Zeiger -7 versehen. Dieser Hinweis auf die primitive Form der Zahl -7 ist entbehrlich. Es ist sin am $(-7\,u) = -$ sin am $(7\,u)$, also

$$\text{sin am}\,(-7\,u) = x\,\frac{\varphi_{-7}}{\chi_{-7}}.$$

Der Ausdruck $\varphi_{-7} = 0$ ist die Teilungsgleichung mit den 48 Wurzeln δ.

Man kann φ_{-7} zerlegen und setzen:

$$\varphi_{-7} = Y^2 - 7\,Z^2.$$

Man findet die Zahlenwerte:

$$Y = x^{24} + 7\,(14\,x^{20} + 21\,x^{16} - 44\,x^{12} + 17\,x^8 - 2\,x^4 + 3),$$
$$Z = -40\,x^{20} - 24\,x^{16} + 48\,x^{12} + 16\,x^8 - 8\,x^4 + 8.$$

Setzt man in (5.) $r = 1$, so sind $\delta_0, \delta_4, \delta_8$ reell oder rein imaginär, ihre 4. Potenzen also positiv; $\delta_2, \delta_6, \delta_{10}$ entstammen den Argumenten der vorigen Klasse durch Multiplikation mit $1+i$. Folglich sind auch $\delta_2, \delta_6, \delta_{10}$ reelle oder rein imaginäre Zahlen mit dem Faktor $1+i$. Daher sind ihre 4. Potenzen negativ, folglich auch ihr Pro-

dukt. Daher sind δ_{2h}^4, $h = 0, 1, \ldots, 5$ die Wurzeln der Gleichung $Y - \sqrt{7}\, Z = 0$, weil $7 \cdot 3 - 8\sqrt{7} < 0$. Die Wurzeln δ_1 und δ_7, δ_3 und δ_9 usw. sind einander zugeordnet, sodaß ihre 4. Potenzen konjugiert, ihr Produkt positiv ist. Sie sind Wurzeln der Gleichung $Y + \sqrt{7}\, Z = 0$.

Wie ich a. a. O. Bd. 110, S. 70, 71 mitgeteilt habe, kann man mit Hülfe eines Gefüges von Kongruenzen nach den Moduln $7, 7^2, 7^3$ nicht nur obige Zerlegung, sondern auch die weitere in 4 Faktoren bewirken.

Das Ergebnis erhält die Form:

$$A + B\sqrt{7} + C\sqrt{2}\sqrt[4]{7} + D\sqrt{2}\sqrt[4]{7^3}.$$

Hier bedeuten A, B, C, D ganze ganzzahlige reelle Funktionen von x^4. Behandelt man $\sqrt{7}$ und $\sqrt[4]{7^3}$ als 2. und 3. Potenz von $\sqrt[4]{7}$ und erteilt dieser ihre 4 Werte, so erhält man die 4 Faktoren der Teilungsgleichung. Die Zuordnung zu den Wurzeln ergibt sich wie folgt.

Die erste Gleichung sei:

$$(11.) \quad x^{12} + 7\,(7\,x^8 + 17\,x^4 + 1) + \sqrt{7}\,(20\,x^8 + 40\,x^4 + 4)$$
$$- \sqrt{2}\sqrt[4]{7}\,(21\,x^8 + 50\,x^4 + 5) - \sqrt{2}\sqrt[4]{7^3}\,(9\,x^8 + 18\,x^4 + 1) = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung müssen eine der 4 Gruppen bilden, in welche sie nach dem biquadratischen Charakter der Zahlen g^n zerfallen. Nun sind δ_0^4, δ_4^4, δ_8^4 reell und positiv, δ_2^4, δ_6^4, δ_{10}^4 aber negativ. Daraus ergibt sich sofort, daß (11.) die Wurzeln δ_0^4, δ_4^4, δ_8^4 hat und man die Gleichung für δ_2^4, δ_6^4, δ_{10}^4 findet, wenn man $\sqrt[4]{7}$ (oder $\sqrt{2}$) in Gleichung (11.) sein Vorzeichen ändern läßt.

Die Unterscheidung der beiden letzten Faktoren von den ersten beiden ist leicht; die gegenseitige ist nicht einfach.

Man bedient sich wohl am besten der Beziehung:

$$\frac{\operatorname{sin am}(-1+2i)\,u}{\operatorname{sin am} u} = \frac{x^4 - 1 + 2i}{1 + (-1+2i)\,x^4},$$

setzt u der Reihe nach den aus (5.) für g^0, g^4, g^8 folgenden Werten gleich, sodaß links das Produkt entsteht: $\frac{\delta_1\,\delta_5\,\delta_9}{\delta_0\,\delta_4\,\delta_8}$. Rechts erscheint eine ganze symmetrische Funktion der $\delta_0^4, \delta_4^4, \delta_8^4$. Nach ziemlich umfangreicher Rechnung folgt: $\delta_1^4, \delta_5^4, \delta_9^4$ sind die Wurzeln der Gleichung:

$$(12.) \quad x^{12} + 7\,(7\,x^8 + 17\,x^4 + 1) - \sqrt{7}\,(20\,x^8 + 40\,x^4 + 4)$$
$$- i\sqrt{2}\sqrt[4]{7}\,(21\,x^8 + 50\,x^4 + 5) + i\sqrt{2}\sqrt[4]{7^3}\,(9\,x^8 + 18\,x^4 + 1) = 0.$$

Man kann die Ergebnisse auch durch die ϑ-Reihen prüfen. Für $u = \frac{4K}{7}$ wird $v = \frac{2\pi}{7}$. Setzt man ein, so wird für $\alpha_1 = \operatorname{sin am} \frac{4K}{7}$:

$$\alpha_1 = \frac{2\,q^{\frac{1}{4}} \sin\frac{2\pi}{7} - 2\,q^{\frac{9}{4}} \sin\frac{\pi}{7}}{1 - 2\,q\cos\frac{3\pi}{7} - 2\,q^4\cos\frac{\pi}{7}},$$

$$\log q = 0,\,635\,6236 - 2.$$

Weiter braucht man für siebenstellige Rechnung nicht zu gehen. Ähnliche Ausdrücke gewinnt man für $\alpha_2 = \sin\mathrm{am}\frac{8K}{7}$ und $\alpha_3 = \sin\mathrm{am}\frac{12K}{7}$.

Bei Aufstellung der ϑ-Reihen bringt man alle Winkel auf die drei spitzen: $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}$. Man findet.

$$\alpha_1 = 0{,}726\,1652,\ \alpha_2 = 0{,}965\,5251,\ \alpha_3 = 0{,}373\,8433;$$
$$\alpha_1^4 = 0{,}278\,0620,\ \alpha_2^4 = 0{,}896\,0692,\ \alpha_3^4 = 0{,}019\,5352;$$
$$\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4 = 1{,}166\,6637,$$

was mit dem aus (11.) stammenden Ausdruck stimmt,

$$\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4 = -49 - 20\sqrt{7} + 21\sqrt{2}\sqrt[4]{7} + 9\sqrt{2}\sqrt[4]{7^3}.$$

Ebenso ergibt sich:

$$\alpha_1^4\,\alpha_2^4\,\alpha_3^4 = -7 - 4\sqrt{7} + 5\sqrt{2}\sqrt[4]{7} + \sqrt{2}\sqrt[4]{7^3} = 0{,}00472\,01329.$$

§ 3. Die Resolventen.

Man betrachte die beiden wiederkehrenden Reihen:

$$(\varepsilon^h, \delta) = \delta_0 + \varepsilon^h\delta_1 + \varepsilon^{2h}\delta_2 + \cdots + \varepsilon^{(\mu-1)h}\delta_{\mu-1};\ \varepsilon^{h\mu} = -i;$$
$$(\varepsilon^k, \delta^{-1}) = \delta_0^{-1} + \varepsilon^k\delta_1^{-1} + \varepsilon^{2k}\delta_2^{-1} + \cdots + \varepsilon^{(\mu-1)k}\delta_{\mu-1}^{-1};\ \varepsilon^{k\mu} = i;$$
$$q = \eta\eta' = 4\mu + 1;\ \delta_n = \sin\mathrm{am}\frac{4rg^nK}{\eta}.$$

Sei g primitive Wurzel zum Modul η und $g^\mu \equiv i \bmod \eta$, ε eine primitive Wurzel der Gleichung $\varepsilon^{q-1} = 1$. Dann sei $\varepsilon^\mu = i$. Folglich muß $h = 4n + 3$, $k = 4n + 1$ sein. Es ist $\delta_\mu = \sin\mathrm{am}\frac{4ri K}{7} = i\delta_0$. Hieraus folgt, daß in den obigen Ausdrücken vom μ-ten Gliede an Wiederkehr stattfindet. Bildet man das Produkt (vergleiche meinen Aufsatz a. a. O. Bd. 111, S. 198), so folgt:

(13.) $$(\varepsilon^h, \delta)(\varepsilon^k, \delta^{-1}) = 1 + \varepsilon^{h+k} + \varepsilon^{2(h+k)} + \cdots + \varepsilon^{(\mu-1)(h+k)} + y_1\varepsilon^h + y_2\varepsilon^{2h} + \cdots + y_{\mu-1}\varepsilon^{(\mu-1)h}.$$

(14.) $$y_m = \frac{\delta_m}{\delta_0} + \varepsilon^{h+k}\frac{\delta_{m+1}}{\delta_1} + \varepsilon^{2(h+k)}\frac{\delta_{m+2}}{\delta_2} + \cdots + \varepsilon^{(\mu-1)(h+k)}\frac{\delta_{m+\mu-1}}{\delta_{\mu-1}}.$$

Die Ausdrücke y_m sind wiederkehrend. Denn das folgende Glied geht aus dem vorhergehenden durch Verschiebung der Zeiger um 1 und Multiplikation mit ε^{h+k} hervor. Es ist aber $\varepsilon^{\mu(h+k)} = 1$, $\delta_{m+\mu} = i\delta_m$, $\delta_\mu = i\delta_0$.

Die y können aufeinander zurückgeführt werden mit Hilfe der unter ihnen bestehenden Gleichungen. Die Gleichungen entstehen aus den Gleichungen (8.). Im Falle der Siebenteilung haben wir (11.), und zwar aus Gleichung (8.) 1) mit Hilfe der Dreiheiten $\tau = -1 + 2i$, $\varrho = -1$, $\sigma = 1 + 2i$:

Erstes Paar:

$$\frac{\delta_0}{\delta_1} + i\frac{\delta_7}{\delta_1} = i + \frac{\delta_7}{\delta_0};\quad \frac{\delta_0}{\delta_7} + i = i\frac{\delta_1}{\delta_7} + \frac{\delta_1}{\delta_0}.$$

Ähnlich sind die übrigen 9 gebaut. Wir verschieben jeden Zeiger um 1 und multiplizieren die neuentstandene Gleichung mit ε^{h+k}. Dies Verfahren wiederholen

wir 11 mal. Kommt in irgendeiner Gleichung der Quotient der Wurzeln $\delta_m : \delta_n$ vor, so ergibt sich daraus

$$\sum_0^{11}{}_r \; \varepsilon^{r(h+k)} \frac{\delta_{m+r}}{\delta_{n+r}}.$$

Das ist:

$$\varepsilon^{-n(h+k)} y_{m-n}, \text{ wenn } m > n, \quad -i\,\varepsilon^{-n(h+k)} y_{12+m-n}, \text{ wenn } m < n.$$

Wir erhalten also 11 Gleichungen unter den y aus den 11 Gleichungen, die unter den Quotienten der Wurzeln bestehen. Mit Hilfe dieser Gleichungen kann man in (13.) die rechts stehenden verschiedenen y bestimmen oder aufeinander zurückführen. Ersteres ist im Falle $h + k = 0$ oder $h + k = 48$ zutreffend. Dieser nimmt eine Vorzugsstellung ein. Es ist für $h + k = 0$ oder 48:

$$y_m = \sum_0^{11}{}_r \frac{\delta_{m+r}}{\delta_r}.$$

Diese y_m, die wir mit dem Buchstaben z_m bezeichnen wollen, sind *ganze Zahlen.* Wie ich a. a. O. S. 116 bewiesen habe, kann man die Berechnung dieser Zahlen durch eine Kettenbruchentwicklung in der Art vornehmen, daß die Aufgabe von der Primzahl η auf eine andere mit kleinerer Norm übertragen wird. Folgende neue Formel dient dem gleichen Zweck:

$$-\eta \, \Sigma_m \frac{\gamma_{m+\operatorname{ind}\eta}}{\gamma_{m+\operatorname{ind}(1+i)}} + \varrho \, \Sigma_n \frac{\delta_{n+\operatorname{ind}\varrho}}{\delta_{n+\operatorname{ind}(1+i)}} = \frac{\eta^2 - \varrho^2}{4(1+i)}.$$

γ ist Teilungswurzel zu ϱ, δ zu η. ind η und ind $(1 + i)$ als Zeiger bei γ sind zur primitiven Wurzel g_1 mod ϱ verstanden; die Zeiger bei δ gehören zu g mod η.

Nach diesen Formeln und nach den 11 Gleichungen kann man die 11 verschiedenen z berechnen. Das Ergebnis ist nach Eintragung in (13.):

$$\begin{aligned}(15.)\qquad (\varepsilon^h, \delta)\,(\varepsilon^{-h}, \delta^{-1}) &= 12 + (-5+3i)\,\varepsilon^h + (6-6i)\,\varepsilon^{2h} \\ &+ (-1-3i)\,\varepsilon^{3h} + 8i\,\varepsilon^{4h} + (5-i)\,\varepsilon^{5h} + (4+4i)\,\varepsilon^{6h} \\ &+ (-5-3i)\,\varepsilon^{7h} + 4\,\varepsilon^{8h} + (3+i)\,\varepsilon^{9h} + (2-2i)\,\varepsilon^{10h} + (-5-i)\,\varepsilon^{11h}.\end{aligned}$$

Für die 8 primitiven Wurzeln der Gleichung $\varepsilon^{12} = -i$ ist die Norm dieser Zahl $2^{10} \cdot 7^8$. Für die 4 aus $\varepsilon^4 = i$ hervorgehenden ist sie $2^3 \cdot 7^4$.

Man bestätigt leicht, daß die rechte Seite von (15.) gemäß einer von mir a. a. O. Bd. 111 S. 199 angegebenen Eigenschaft der Kongruenz genügt:

$$(\varepsilon^h, \delta)\,(\varepsilon^{-h}, \delta^{-1}) \equiv g^8 \frac{1 - g^{12}\varepsilon^{12h}}{1 - g\,\varepsilon^h} \bmod 7.$$

Der Zähler verschwindet für alle h ausgenommen für den im Nenner stehenden Wert, der mit $\varepsilon^{47} \equiv g \bmod 7$ gleichwertig ist.

Auch für die beiden folgenden besonderen Fälle $h + k = 24$ oder 72, $h + k = 12$ oder 60 habe ich die Rechnungen durchgeführt. Das Ergebnis ist:

$$\begin{aligned}(16.)\qquad (\varepsilon^h, \delta)\,(\varepsilon^k, \delta^{-1}) &= \{(2+i)\,\varepsilon^h - 4i\,\varepsilon^{2h} + (-1+2i)\,\varepsilon^{3h} \\ &+ (2+2i)\,\varepsilon^{4h} + \varepsilon^{5h} + 2\,\varepsilon^{6h} + (-1-2i)\,\varepsilon^{7h} + (1+2i)\,\varepsilon^{9h} \\ &+ i\,\varepsilon^{11h}\}\,(1+i)\sqrt{7}.\end{aligned}$$

Eine beachtenswerte Gruppe bilden die 4 durch 3 teilbaren h, k. Es sind dies:

$$h = 3,\ 15,\ 27,\ 39;\ k = 21,\ 9,\ 45,\ 33.$$

Man findet aus (16.)

$$(\varepsilon^3, \delta)\,(\varepsilon^{21}, \delta^{-1}) = (-2 + 2i - 2i\,\varepsilon^6 + \varepsilon^3 + \varepsilon^9)\,(1+i)\sqrt{7},$$
$$(\varepsilon^{27}, \delta)\,(\varepsilon^{45}, \delta^{-1}) = (-2 + 2i - 2i\,\varepsilon^6 - \varepsilon^3 - \varepsilon^9)\,(1+i)\sqrt{7}.$$

Aus (15.) ergibt sich:

$$(\varepsilon^3, \delta)\,(\varepsilon^{45}, \delta^{-1}) = 7\,(-1+i)\,(\varepsilon^3 - \varepsilon^9),$$
$$(\varepsilon^{27}, \delta)\,(\varepsilon^{21}, \delta^{-1}) = 7\,(1-i)\,(\varepsilon^3 - \varepsilon^9),$$

hieraus nach leichter Rechnung:

$$\frac{(\varepsilon^{27}, \delta)}{(\varepsilon^3, \delta)} = -\frac{1 + (1+i)\,(\varepsilon^6 + \varepsilon^3 - \varepsilon^9)}{\sqrt{7}}.$$

Für $h + k = 12$ oder 60 ergibt die Rechnung:

$$(17.)\quad (\varepsilon^h, \delta)\,(\varepsilon^k, \delta^{-1}) = \{\varepsilon^h + (1-i)\,\varepsilon^{2h} - \varepsilon^{3h} + i\,\varepsilon^{5h} + (1+i)\,\varepsilon^{6h}$$
$$+ \varepsilon^{7h} + i\,\varepsilon^{9h} + (1-i)\,\varepsilon^{10h} + i\,\varepsilon^{11h}\}\,\sqrt{2}\,\sqrt[4]{7^3}.$$

Eine beachtenswerte Gruppe bilden hier ebenfalls:

$$h = 3,\ 15,\ 27,\ 39;\quad k = 9,\ 45,\ 33,\ 21.$$

Setzt man $\varepsilon^{4h} = i$ in (17.) ein, so folgt:

$$(\varepsilon^h, \delta)\,(\varepsilon^{12-h}, \delta^{-1}) = (-i\,\varepsilon^h + (-1+i)\,\varepsilon^{2h} - \varepsilon^{3h})\,\sqrt{2}\,\sqrt[4]{7^3}.$$

Läßt man h die Werte h, $h+12$, $h+24$, $h+36$ durchlaufen und bildet das Produkt, so ist

$$\Pi\,(\varepsilon^h, \delta)\,(\varepsilon^{-h}, \delta^{-1}) = 2^3 \cdot 7^4;\quad \Pi\,\pi\,(\varepsilon^h) = 2 \cdot 7,$$

also erscheint rechts derselbe Wert, den wir oben Gl. (15.) ankündigten. Es ist gesetzt:

$$\pi\,(\varepsilon^h) = -i\,\varepsilon^h + (-1+i)\,\varepsilon^{2h} - \varepsilon^{3h}.$$

Bei der Ausrechnung ist außer den Gleichungen (8.) auch die Multiplikation mit $-1 + 2i$ und ist endlich benutzt worden:

$$\frac{\operatorname{sin\,am}\,(2\,i\,u)}{\operatorname{sin\,am}\,(1+i)\,u} = (1+i)\,\frac{1-x^4}{1+x^4}.$$

Aus dieser Gleichung folgt mit Hilfe von (12.):

$$\frac{\delta_8}{\delta_{10}} + \frac{\delta_0}{\delta_2} + \frac{\delta_4}{\delta_6} = (1+i)\,\frac{-2 + \sqrt{2}\,\sqrt[4]{7} + \sqrt{2}\,\sqrt[4]{7^3}}{4}.$$

Die Teilungskörper der elliptischen Funktionen im Bereich der dritten Einheitswurzel.

Von Herrn *Carl Bindschedler* in Zürich.

Einleitung.

Bekanntlich sind alle absolut-*Abel*schen Gleichungen durch Kreiskörper lösbar, d. h. ihre Wurzeln sind rational ausdrückbar durch die Funktion $e^{\pi i z}$, wenn man z einen geeigneten rationalen Zahlwert beilegt. Für die zu einem imaginär-quadratischen Grundkörper relativ-*Abel*schen Gleichungen vermutete *Kronecker*, der Entdecker des erwähnten Satzes, die analoge Tatsache, daß ihre Wurzeln enthalten seien in den Körpern der singulären Moduln $K(j(z))$, wo z einen geeigneten Zahlwert des Grundkörpers annimmt (Bericht d. K. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1877, S. 851). *Fueter* hat dann nachgewiesen (Math. Annalen 1914: *Abel*sche Gleichungen in quadratisch-imaginären Zahlkörpern), daß zur vollständigen Lösung aller dieser Gleichungen die Teilungskörper der elliptischen Funktionen notwendig sind: Jede in einem imaginär-quadratischen Körper *Abel*sche Gleichung ist durch Kreiskörper und Teilungskörper der elliptischen Funktionen lösbar (S. 253 der erwähnten Arbeit). Diese Körper sind, entgegen der irrtümlichen Behauptung *H. Weber*s (Algebra III, S. 620), im allgemeinen nicht enthalten in den Körpern der singulären Moduln und Kreiskörpern (*Fueter*, siehe Einleitung zu der zitierten Abhandlung). (Eine neuere Darstellung dieses Gegenstandes, von *T. Takagi*, ist erschienen im Journal of the College of Science, Imp. University of Tokyo, 31. Juli 1920.)

Hieraus erhellt die Bedeutung der Teilungskörper der elliptischen Funktionen. *H. Weber* hat ihre Theorie im III. Band seines Lehrb. d. Algebra dargestellt. Die vorliegende Arbeit gibt nun für den Fall des Körpers der dritten Einheitswurzel als Grundkörper eine Entwicklung derselben. Dieser Fall ist allerdings bereits behandelt worden von *Takenouchi* [On the relatively Abelian corpus with respect to the corpus defined by a primitive cube root of unity, (im selben jap. Journal Bd. 37, Art. 5, 1916)], wo auch die Frage der Vollständigkeit erledigt ist. Doch gibt die vorliegende Arbeit, die ohne Kenntnis dieser letzteren entstanden ist, außer einem neuen Beweis des Fundamentalsatzes über die Relativdiskriminante wohl einige weitere Einblicke in die arithmetische Natur der Teilungskörper.

Der Inhalt des ersten (theoretischen) Teils gliedert sich folgendermaßen:

Unter A. werden die Zahlen, die von der Funktion $\mathfrak{S}(z)$ für ein dem Grundkörper angehörendes (gebrochenes) Argument geliefert werden, untersucht und ihre Norm bestimmt. Ferner wird ein Satz über die Zerlegung der Primideale ersten Grades des Grundkörpers im Teilungskörper aufgestellt. Die Resultate dieses Kapitels entsprechen im wesentlichen denjenigen bei *Weber*.

Kapitel B. bezieht sich auf die Relativdiskriminante des Körpers. Es wird der von *R. Fueter* in der oben erwähnten Abhandlung für Teilungskörper über einem einklassigen Grundkörper aufgestellte Satz (S. 255): „Die Relativdiskriminante des Teilungskörpers, der zum Führer $\mathfrak{f}$ gehört, enthält nur die Primideale von $\mathfrak{f}$" auf elementare Weise bewiesen. Der Beweis gelingt durch möglichste Ausnützung der Multiplikationsformel mit Hilfe eines bei dieser Gelegenheit gefundenen merkwürdigen Satzes über die Werte, welche die linke Seite der Teilungsgleichung $T_{\mathfrak{f}} = 0$ für eine gewisse Klasse von Argumenten annimmt.

Unter C. wird der Grad des Teilungskörpers bei beliebig zusammengesetztem Führer festgestellt und damit die Irreduzibilität der Teilungsgleichung bewiesen.

Der zweite Teil der Arbeit enthält eine Anzahl zahlenmäßig berechneter, durch die Teilungsgleichungen bestimmter Teilungskörper.

I. Theoretischer Teil.

A. Die Teilungszahlen; ihre Norm; Primideale ersten Grades.

1. *Die Multiplikationsformel.*

Die zugrunde gelegte elliptische Funktion sei $\mathfrak{S}(z) = \frac{g_3}{\wp^3(z)}$, wobei $\wp(z, \omega_1, \omega_2)$ die *Weierstraß*sche $\wp$-Funktion und $g_3(\omega_1, \omega_2)$ die *Weierstraß*sche Invariante bedeutet; die Perioden seien $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \varrho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$; $(\varrho^3 = 1)$. Jede Periode ist dann eine ganze Zahl des Körpers $k(\varrho)$ und umgekehrt. Die Funktion $\mathfrak{S}(z, \omega_1, \omega_2)$ ist homogen von nullter Ordnung. Daher wird

$$\mathfrak{S}(\varrho z, 1, \varrho) = \mathfrak{S}(z, \varrho^2, 1) = \mathfrak{S}(z, 1, \varrho);$$

ferner ist $\mathfrak{S}(-z) = \mathfrak{S}(z)$,

also $$\underline{\mathfrak{S}(\varepsilon z) = \mathfrak{S}(z)},$$

wo ε hier wie im folgenden irgend eine Einheit des Grundkörpers, also eine 6. Einheitswurzel bedeutet. Dagegen ist

$$\wp(\varrho z, 1, \varrho) = \varrho^{-2}\wp(z, \varrho^2, 1) = \varrho\,\wp(z, 1, \varrho).$$

Wegen dieser Eigenschaft ist $\mathfrak{S}(\mathfrak{f} z)$ ($\mathfrak{f} = x + y\varrho$, x, y ganze rationale Zahlen)[1] nicht nur eine rationale Funktion von $\wp(z)$, sondern auch von $\mathfrak{S}(z)$:

$$\frac{\mathfrak{S}(\mathfrak{f} z)}{\mathfrak{S}(z)} = R[\mathfrak{S}(z)].$$

Durch Vergleichung der Periodenparallelogramme erkennt man unmittelbar, daß $\mathfrak{S}(\mathfrak{f} z)$ vom Grade $n(\mathfrak{f})$ in $\mathfrak{S}(z)$ ist.

[1] $\mathfrak{f}$ ist hier als Zahl definiert, doch wird, wo keine Verwechslung möglich ist, auch das *Ideal* $(\mathfrak{f})$ mit $\mathfrak{f}$ bezeichnet.

$\mathfrak{S}(z)$ verschwindet für $z = 0$ von 6. Ordnung und hat für $z = \frac{1}{\sqrt{-3}}$ einen Pol 3. Ordnung (*Weber*, Alg. III, S. 571). Daher ist unter Berücksichtigung, daß $\mathfrak{S}(z) - \mathfrak{S}(\frac{1}{2})$ wie $\wp(z) - \wp(\frac{1}{2})$, d. h. von 2. Ordnung, verschwindet:

$$(1.) \qquad \frac{\mathfrak{S}(\mathfrak{f} z)}{\mathfrak{S}(z)} = k \frac{\prod_{\nu}^{6} \left[\mathfrak{S}(z) - \mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)\right] B^3(\mathfrak{S})}{\prod_{\nu}^{\prime 3} \left[\mathfrak{S}(z) - \mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}\sqrt{-3}}\right)\right]} = k \frac{\Phi_{\mathfrak{f}}^{6}(\mathfrak{S})\, B^3}{\psi_{\mathfrak{f}}^{3}(\mathfrak{S})};$$

$$B = \mathfrak{S} - \mathfrak{S}(\tfrac{1}{2}), \text{ falls } \mathfrak{f} \equiv 0\ (2)\ ,$$
$$B = 1 \qquad\quad , \text{ falls } \mathfrak{f} \not\equiv 0\ (2)\ .$$

Dabei durchläuft (ν) in dem Produkt des Zählers alle Idealklassen (mod $\mathfrak{f}$) mit Ausnahme von $\nu \equiv 0\ (\mathfrak{f})$ und, falls $\mathfrak{f} \equiv 0\ (2)$, von $\nu \equiv \varepsilon \frac{\mathfrak{f}}{2}\ (\mathfrak{f})$. Ist $\mathfrak{f} \equiv 0\ (\sqrt{-3})$, so ist die Klasse $\nu \equiv \varepsilon \frac{\mathfrak{f}}{\sqrt{-3}}$ auszuschließen.

In dem Produkt Π' des Nenners durchläuft (ν) alle Idealklassen (mod $\sqrt{-3}\,\mathfrak{f}$) mit Ausnahme derer, für die $\nu \equiv 0\ (\sqrt{-3})$.

Zähler und Nenner der rechten Seite von (1) sind, falls $\mathfrak{f} \not\equiv 0\ (\sqrt{-3})$, vom selben Grad $n(\mathfrak{f}) - 1$.

Die Konstante k ergibt sich, wenn $\mathfrak{f} \not\equiv 0\ (\sqrt{-3})$, aus $z = \frac{1}{\sqrt{-3}}$ $(\mathfrak{S} = \infty)$ wegen des dreifachen Poles von $\mathfrak{S}(z)$ zu $k = \frac{1}{\mathfrak{f}^3}$. Ist $\mathfrak{f} \equiv 0\ (\sqrt{-3})$, so wird $k = \mathfrak{f}^6$; diese Tatsache sei hier nur der Vollständigkeit wegen angegeben, (sie läßt sich auf einfachem Weg erst mit Hilfe der Sätze im Abschnitt A. 3. nachweisen, wird aber in der Folge gar nicht benutzt werden).

Satz: Die Zahlen $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)$ sind algebraische Zahlen. Ist $\mathfrak{f} \not\equiv 0\ (\sqrt{-3})$, so ist $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)$ eine *ganze* algebraische Zahl.

Beweis: Es ist $\mathfrak{S}(z) = \frac{g_3}{\wp^3(z)}$.

Die Zahl $\wp\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right) = \wp\left(\frac{\nu\,\bar{\mathfrak{f}}}{\mathfrak{f}\,\bar{\mathfrak{f}}}\right) = \wp\left(\frac{\nu_1}{f}\right)$ $(f = n(\mathfrak{f}))$ genügt einer Gleichung $P_f = 0$ (*Weber*, Alg. III, § 58), deren Koeffizienten rational von $g_2 = 0$ und g_3 abhängen. Da g_3 homogen von (-6). Ordnung, $\wp(z, \omega_1, \omega_2)$ aber von (-2). Ordnung ist, ist die Funktion $P_f(\wp)$ homogen in $\wp^3, g_3$ (abgesehen von dem Faktor $\wp$, falls $f \equiv 0\ (3)$). Dies erkennt man übrigens auch direkt aus P_1, P_2, P_3, P_4 (S. 199); durch die Rekursionsformeln (15.), (16.) (S. 200) bleibt die Homogenëität erhalten, da nur noch ein Faktor $\wp'^4 = (4\wp^3 - g_3)^2$ hinzutritt, der selbst homogen in $\wp^3, g_3$ ist; $P_f(\wp) = 0$ ist daher eine Gleichung für $\wp^3$, die nach Division durch eine gewisse

Potenz von g_3 zu einer Gleichung mit *rationalen* Koeffizienten für $\frac{\wp^3}{g_3} = \frac{1}{\mathfrak{S}}$ wird. Damit ist der erste Teil des Satzes erwiesen. Es ist noch zu zeigen, daß für $f \not\equiv 0\ (3)$ das Absolutglied dieser Gleichung ± 1 ist, während die übrigen Koeffizienten ganzzahlig sind. Letzteres ersieht man direkt aus

(2.) $P_1 \equiv 1, \quad P_2 \equiv -1, \quad P_3 \equiv 3\wp(\wp^3 - g_3), \quad P_4 \equiv -2\wp^6 + 10 g_3 \wp^3 + g_3^2$

und aus den Rekursionsformeln (15.), (16.).

Die Division durch eine Potenz von g_3 braucht wegen der Homogenëität nicht ausgeführt zu werden; es muß dann das Absolutglied (für $f \not\equiv 0\ (3)$) von der Form $\pm g_3^s$ sein.

Ich *behaupte:* Es ist $P_m(0) = \begin{cases} 0 & [m \equiv 0\ (3)], \\ +g^s & [m \equiv 1\ (3)], \\ -g^s & [m \equiv 2\ (3)]. \end{cases}$

Beweis: Für $m = 1, 2, 3, 4$ ist die Behauptung nach (2.) richtig. Die *Weber*schen Rekursionsformeln lauten:

$$\begin{aligned} P_{2n+1} &= (4\wp^3 - g_3)^2 P_{n+2} P_n^3 - P_{n+1}^3 P_{n-1}, && \text{wenn } n \equiv 0\ (2), \\ &= P_{n+2} P_n^3 - (4\wp^3 - g_3)^2 P_{n+1}^3 P_{n-1}, && \text{wenn } n \equiv 1\ (2), \\ P_{2n} &= -P_n (P_{n+2} P_{n-1}^2 - P_{n+1}^2 P_{n-2}). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich für $m = 2n$ und $m = 2n+1$ die Richtigkeit der Behauptung unter der Voraussetzung, daß sie für $m \leqq n+2$ erwiesen ist; also für $m = 5\ (n = 2)$, $m = 6\ (n = 3)$ usw.

Also ist $\frac{g_3}{\wp^3} = \frac{1}{\frac{\wp^3}{g_3}}$ für das Argument $z = \frac{v}{\mathfrak{f}}$ eine *ganze* algebraische Zahl, wenn $\mathfrak{f} \not\equiv 0\ (\sqrt{-3})$.

Satz: Die Koeffizienten der Funktionen $\Phi_\mathfrak{f}$ und $\Psi_\mathfrak{f}$ sind Zahlen des Körpers $k(\mathfrak{f}^6)$ $(\equiv k(\mathfrak{f}^2))$.

Beweis: Die Koeffizienten von $\Psi_\mathfrak{f}$ sind zunächst, als rationale Funktionen ihrer Wurzeln, algebraische Zahlen. Erweitert man Zähler und Nenner der rechten Seite von (1.) mit den absolut konjugierten Funktionen $\Psi_\mathfrak{f}'^3, \Psi_\mathfrak{f}''^3, \ldots$, so wird der Nenner eine Funktion $N_\mathfrak{f}^3 = N$ mit rationalen Koeffizienten. Der Zähler werde $k Z_\mathfrak{f}^3 = Z$. Entwickelt man nun die beiden Seiten der Gleichung

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{f} z) N = Z \mathfrak{S}(z)$$

nach Potenzen von $w^6 = g_3 z^6$ (resp. $\mathfrak{S}(\mathfrak{f} z)$ nach Potenzen von $(\mathfrak{f} w)^6$), wobei die Koeffizienten dieser Entwicklungen rationale Zahlen werden (s. *Weber*, Alg. III, § 150, Formel (13.), wo man noch die 3. Potenz zu bilden und zur reziproken Funktion überzugehen hat), so lassen sich die Koeffizienten der Funktion Z rational durch $\mathfrak{f}^6$ ausdrücken. Befreit man nun Zähler und Nenner von $\frac{Z}{N}$ wieder von gemeinsamen Faktoren (was durch rationale Operationen geschieht), so kommt man auf die ursprüngliche Darstellung (1.) zurück; die Koeffizienten von $\Psi_\mathfrak{f}$ sind also Zahlen des Körpers $k(\varrho)$, (wenn $\mathfrak{f}^2$ rational ist, sind es rationale Zahlen), und dasselbe gilt für die Koeffizienten von $k\Phi_\mathfrak{f}^3$ und damit, da die Konstante k als

Koeffizient der höchsten Potenz von $\mathfrak{S}$ auch dem Körper $k(\mathfrak{f}^6)$ angehört, für die Funktionen $\Phi_{\mathfrak{f}}^3$ und $\Phi_{\mathfrak{f}}$.

2. *Die Teilungsgleichung.*

Diejenigen Zahlen $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)$, für die ν und $\mathfrak{f}$ einen gemeinsamen Teiler ν_1 haben, sind offenbar auch Wurzeln von $\Phi_{\frac{\mathfrak{f}}{\nu_1}} = 0$. Man kann daher $\Phi_{\mathfrak{f}}$ von solchen Faktoren $\mathfrak{S} - \mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)$ auf rationalem Weg befreien und erhält eine Funktion $T_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{S})$, deren Wurzeln diejenigen Zahlen $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)$ sind, für die $(\nu, \mathfrak{f}) = (1)$, und deren Koeffizienten wieder Zahlen des Körpers $k(\varrho)$ sind. Der *Grad* dieser Funktion ist, wenn $\mathfrak{f} \neq 2, \neq \sqrt{-3}$, gleich $\frac{1}{6}\varphi(\mathfrak{f})$, wo die Funktion $\varphi(\mu)$ die Anzahl aller zu μ relativ primen Zahlen eines vollständigen Restsystems (mod μ) angibt (*Hilbert:* Zahlbericht, Satz 23). $T_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{S})$ werde nach *Weber* (Alg. III, 592) die Teilungsfunktion, die Gleichung $T_{\mathfrak{f}} = 0$ die Teilungsgleichung, und der durch sie und ϱ definierte Körper der Teilungskörper $K(\mathfrak{f})$ genannt.

Aus der Multiplikationsformel

$$\mathfrak{S}_\xi = \mathfrak{S}\left(\frac{\xi\,\alpha}{\mathfrak{f}}\right) = R_\xi\left[\mathfrak{S}\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{f}}\right)\right],$$

wo R_ξ nur von ξ abhängt und α prim sei zu $\mathfrak{f}$, folgt, da man zu jeder Wurzel $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)$ der Teilungsgleichung eine Zahl ξ so bestimmen kann, daß $\xi\alpha \equiv \nu\,(\mathfrak{f})$, daß sich alle Wurzeln rational durch eine ausdrücken lassen, und zwar ist wegen

$$\mathfrak{S}_{\xi\xi'} = \mathfrak{S}\left(\frac{\xi\xi'\,\alpha}{\mathfrak{f}}\right) = R_\xi R_{\xi'}\left[\mathfrak{S}\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{f}}\right)\right] = R_{\xi'} R_\xi\left[\mathfrak{S}\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{f}}\right)\right]$$

die Gleichung *Abel*sch. Ihre Gruppe ist, da sich die Gleichung als irreduzibel herausstellen wird (siehe unter C.), isomorph mit der Gruppe der primitiven Idealklassen (mod $\mathfrak{f}$).

Die Wurzeln von $T_{\mathfrak{f}} = 0$ werden gelegentlich als Teilungszahlen bezeichnet werden.

3. *Die Normen der Teilungszahlen.*

Es werde das Produkt $\prod_\nu\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)$, das für die im ersten Abschnitt näher bezeichneten ν zu bilden ist, mit α, und das Produkt $\prod_\nu'\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}\sqrt{-3}}\right)$, (wo hier $\nu \not\equiv 0\,(\sqrt{-3})$), mit β bezeichnet. Es sollen diese Produkte α und β bestimmt werden unter der Voraussetzung $\underline{\mathfrak{f} \not\equiv 0\,(\sqrt{-3})}$.

Die Formel A. 1. (1.) ergibt dann, da $k = \frac{1}{\mathfrak{f}^3}$, für $z = 0$ (also $\mathfrak{S} = 0$):

$$\mathfrak{f}^9 = \frac{\alpha^6}{\pm\beta^3} B^3(0). \tag{1.}$$

Nun erhält man aus der für das Periodenverhältnis ϱ (d. h. für $g_2 = 0$) gültigen Formel

$$\wp(2z) = \wp(z)\,\frac{\wp^3(z) + 2g_3}{4\wp^3(z) - g^3}$$

die Multiplikationsformel

$$(2.)\qquad \frac{\mathfrak{S}(2z)}{\mathfrak{S}(z)} = -\left(\frac{\mathfrak{S}-4}{2\mathfrak{S}+1}\right)^3.$$

Es ist also $B(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S} - 4$, (falls $\mathfrak{f} \equiv 0\ (2)$),

$$(3.)\qquad B(0) = -4,$$

während $B(0) = 1$, (falls $\mathfrak{f} \not\equiv 0\ (2)$).

Eine zweite Beziehung zwischen α und β ergibt sich durch folgende Überlegung:

Aus dem Additionstheorem der $\wp$-Funktion gewinnt man die Formel

$$(4.)\qquad \frac{\mathfrak{S}(\sqrt{-3}\cdot z)}{\mathfrak{S}(z)} = \left(\frac{3}{\mathfrak{S}-1}\right)^3;$$

denn es ist mit $\sqrt{-3} = 2\varrho + 1$,

$$(\alpha.)\quad \wp((2\varrho+1)z) + \wp((\varrho+1)z) + \wp(\varrho z) = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\wp'((\varrho+1)z) - \wp'(\varrho z)}{\wp((\varrho+1)z) - \wp(\varrho z)}\right)^2;$$

$\wp((\varrho+1)z) = \wp(\varrho^2 z) = \varrho^2\wp(z)$, da $\wp(\varrho z) = \varrho\,\wp(z)$,

$\wp'((\varrho+1)z) = \wp'(-\varrho^2 z) = -\wp'(z)$, da $\wp'(\varrho z) = \wp'(z)$.

Damit wird die rechte Seite von $(\alpha.)$:

$$\frac{1}{4}\,\frac{4\wp'^2(z)}{\varrho^2\wp^2(1-\varrho)^2} = \varrho\,\frac{4\wp^3 - g_3}{\wp^2(1-\varrho)^2} \quad \text{und damit } (\alpha.):$$

$$(\beta.)\quad \underline{\wp((2\varrho+1)z)} = \varrho\,\frac{4\wp^3 - g_3}{\wp^2(1-\varrho)^2} - \varrho\wp - \varrho^2\wp = \varrho\,\frac{\wp^3 - g^3}{\wp^2(1-\varrho)^2} = -\,\underline{\frac{\wp^3 - g_3}{3\wp^2}};$$

also $$\frac{\wp(\sqrt{-3}\,z)}{\wp(z)} = -\,\frac{1-\mathfrak{S}}{3} = \frac{\mathfrak{S}-1}{3}.$$

Die Gleichung (4.) lautet entwickelt:

$$(5.)\quad \mathfrak{S}^3(z) - 3\,\mathfrak{S}^2(z) + 3\,\mathfrak{S}(z)\left[1 - \frac{9}{\mathfrak{S}(\sqrt{-3}\cdot z)}\right] - 1 = 0.$$

Setzt man hierin $\sqrt{-3}\,z \equiv \frac{\nu}{\mathfrak{f}}\ (1, \varrho)$, so folgt hieraus für das Produkt der Wurzeln $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}\sqrt{-3}}\right)$, $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}\sqrt{-3}} + \frac{1}{\sqrt{-3}}\right)$, $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}\sqrt{-3}} - \frac{1}{\sqrt{-3}}\right)$ dieser Gleichung:

$$(6.)\qquad \mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}\sqrt{-3}}\right)\cdot\mathfrak{S}\left(\frac{\nu+\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}\sqrt{-3}}\right)\cdot\mathfrak{S}\left(\frac{\nu-\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}\sqrt{-3}}\right) = 1.$$

Von den drei Zahlen ν, $\nu + \mathfrak{f}$, $\nu - \mathfrak{f}$ ist wegen $\mathfrak{f} \not\equiv 0\ (\sqrt{3})$ eine und nur eine durch $\sqrt{-3}$ teilbar; zwei Faktoren des Produktes (6.) sind also in β und einer in α enthalten.

Ist zunächst $\underline{\mathfrak{f} \not\equiv 0\ (2)}$, so folgt hieraus, wenn man die Beziehung (6.) für alle im Produkt α vorkommenden Werte ν bildet, durch Multiplikation

$$\alpha\beta = 1,$$

(wo β doppelt so viele Faktoren als α enthält), also nach (1.), da hier $P_2(0) = 1$ und α im Körper $k(\varrho)$ liegen muß:

$$\underline{\alpha = \varepsilon\mathfrak{f}}, \quad \underline{\beta = \frac{1}{\varepsilon\mathfrak{f}}}.$$

Ist dagegen $\mathfrak{f} \equiv 0\ (2)$, so ist für $\nu = \frac{\mathfrak{f}}{2}$

$$\mathfrak{S}\left(\frac{\frac{\mathfrak{f}}{2}}{\mathfrak{f}\sqrt{-3}}\right) = \mathfrak{S}\left(\frac{\frac{\mathfrak{f}}{2} - \mathfrak{f}}{\mathfrak{f}\sqrt{-3}}\right) = \mathfrak{S}\left(\frac{1}{2\sqrt{-3}}\right),$$

während in β dieser Faktor nur *einfach* auftritt. Zudem tritt der dritte Faktor $\mathfrak{S}\left(\frac{\frac{\mathfrak{f}}{2} + \mathfrak{f}}{\mathfrak{f}\sqrt{-3}}\right) = \mathfrak{S}(\tfrac{1}{2}) = 4$ in α nicht auf. Man hat also in diesem Fall:

$$\alpha \cdot \beta \cdot 4 \cdot \mathfrak{S}\left(\frac{1}{2\sqrt{-3}}\right) = 1.$$

Nach (2.) ist $\mathfrak{S}\left(\frac{1}{2\sqrt{-3}}\right) = -\tfrac{1}{2}$, also

$$\alpha\beta = -\tfrac{1}{2},$$

und somit nach (1.) und (3.)

$$\underline{\alpha = \frac{\mathfrak{f}}{2}\varepsilon}, \quad \underline{\beta = \frac{-1}{\varepsilon\mathfrak{f}}}.$$

Ist also $\mathfrak{f} \not\equiv 0\ (\sqrt{-3})$, so hat $\Phi_{\mathfrak{f}}$ die Gestalt

$$\Phi_{\mathfrak{f}} \equiv \mathfrak{S}^n + \alpha_1\mathfrak{S}^{n-1} + \cdots + \varepsilon\mathfrak{f}, \text{ resp. } \Phi_{\mathfrak{f}} \equiv \mathfrak{S}^n + \alpha_1\mathfrak{S}^{n-1} + \cdots + \varepsilon\frac{\mathfrak{f}}{2},$$

(falls $\mathfrak{f} \equiv 0\ (2)$),

wo nach dem früheren die α_i ganze Zahlen in $k(\varrho)$ sind.

Ist nun $\mathfrak{f} = \mathfrak{l}^u$ $(\mathfrak{l} \neq \sqrt{-3})$, wo $(\mathfrak{l})$ ein Primideal (ersten oder zweiten Grades) in $k(\varrho)$ bedeute, so ist $\Phi_{\mathfrak{l}^u}$ teilbar durch $\Phi_{\mathfrak{l}^{u-1}}$, deren konstantes Glied $\varepsilon\,\mathfrak{l}^{u-1}$, resp. (für $\mathfrak{l} = 2$) $\pm 2^{u-2}$ ist. Je nachdem $\mathfrak{l} \neq 2$ oder $\mathfrak{l} = 2$ ist, ist der Grad von $\Phi_{\mathfrak{l}^u}$ (s. A. 1.) gleich $\frac{1}{6}[n(\mathfrak{l}^u) - 1] = \frac{1}{6}(l^u - 1)$ $(l = n(\mathfrak{l}))$, resp. $\frac{n(2^u) - 1 - 3}{6}$ $= \frac{2^{2u} - 4}{6} = \frac{2}{3}(2^{2u-2} - 1)$, und der Grad von $\Phi_{\mathfrak{l}^{u-1}}$ gleich $\frac{1}{6}(l^{u-1} - 1)$ resp. $\frac{2}{3}(2^{2u-4} - 1)$, falls $u \geqq 2$, (für $\mathfrak{f} = 2$ ist $\Phi_2 \equiv \mathfrak{S} - 4$). Der Quotient $\frac{\Phi_{\mathfrak{l}^u}}{\Phi_{\mathfrak{l}^{u-1}}}$ ist also vom Grad $\frac{l^u}{6}\left(1 - \frac{1}{l}\right) = \frac{1}{6}\varphi(\mathfrak{l}^u)$ resp. $\frac{2}{3}(2^{2u-2} - 2^{2u-4}) = \frac{1}{6}\varphi(2^u)$, und da der Koeffizient des höchsten Gliedes 1 ist, so ist dieser Quotient, dessen konstantes Glied $\varepsilon\,\mathfrak{l}$ ist, die Teilungsfunktion $T_{\mathfrak{l}^u}$. D. h.!

Satz: Die Norm der Zahl $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{l}^u}\right)$ $(\mathfrak{l} \neq \sqrt{-3})$ ist $\varepsilon\,\mathfrak{l}$.

(Der Ausdruck „Norm" rechtfertigt sich später, wenn die Irreduzibilität von $T_\mathfrak{f}$ bewiesen ist.)

Enthält $\mathfrak{f}$ (immer unter der Voraussetzung $\mathfrak{f} \not\equiv 0 \ (\sqrt{-3})$) mindestens zwei verschiedene Faktoren, $\mathfrak{f} = \mathfrak{l}_1^{u_1} \mathfrak{l}_2^{u_2} \dots \mathfrak{l}_r^{u_r}$, $u_1 u_2 > 0$, so ist $\Phi_\mathfrak{f}$ teilbar durch $\Phi_{\mathfrak{f}_1}$, wo $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{l}_1^{u_1 - 1} \mathfrak{l}_2^{u_2} \cdots \mathfrak{l}_r^{u_r}$. Der Quotient hat das Absolutglied $\varepsilon \mathfrak{l}_1$ und enthält die Funktion $T_\mathfrak{f}$. Andererseits enthält auch $\frac{\Phi_\mathfrak{f}}{\Phi_{\mathfrak{f}_2}}$ die Funktion $T_\mathfrak{f}$, wo $\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{l}_1^{u_1} \mathfrak{l}_2^{u_2 - 1} \cdots \mathfrak{l}_r^{u_r}$, und hat das Absolutglied $\varepsilon' \mathfrak{l}_2$. Da $(\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2) = (1)$, so ist notwendig das Absolutglied von $T_\mathfrak{f}$ eine Einheit von $k(\varrho)$. D. h.

Satz: Enthält $\mathfrak{f}$ $(\not\equiv 0 \ (\sqrt{-3}))$ mindestens zwei voneinander verschiedene Primfaktoren, so ist $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)$ eine Einheit.

Aus (5.) folgt, unter Berücksichtigung von (4.) $\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{3}\right) = 1\right)$ für $z = \frac{\nu}{\sqrt{-3^3}}, \cdots, z = \frac{\nu}{\sqrt{-3^n}}$ sukzessive, daß $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\sqrt{-3^n}}\right)$ $(n > 1)$ eine Einheit ist.

Betrachtet man die aus (1.) hervorgehende Gleichung

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{f} z) \prod_\nu' = k \Pi^6 B^3 \mathfrak{S}$$

als Gleichung für $\mathfrak{S}(z)$ bei gegebenem $\mathfrak{S}(\mathfrak{f} z)$, so sind ihre Wurzeln, wenn wieder $\mathfrak{f} \not\equiv 0 \ (\sqrt{-3})$ vorausgesetzt wird: $\mathfrak{S}\left(z + \frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)$, wo nun ν *alle Zahlen* eines vollständigen Restsystems (mod $\mathfrak{f}$) durchläuft (auch $\nu \equiv 0$). (Die Gleichung ist vom Grad $f = n(\mathfrak{f})$).

Also ist das Wurzelprodukt

$$\prod_\nu \mathfrak{S}\left(z + \frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right) = \frac{\pm \mathfrak{S}(\mathfrak{f} z) \beta^3}{k}, \tag{7.}$$

wo nach dem im Anfang dieses Abschnittes bewiesenen $k = \pm \beta^3$.

Ist also $\eta = \frac{\nu_1}{\mathfrak{f}_1}$ irgendeine gebrochene Zahl des Körpers $k(\varrho)$, deren Nenner $\mathfrak{f}_1 \not\equiv 0 \ (\sqrt{-3})$, so erkennt man; wenn man in (7.) $z = \eta$ setzt, daß

$$\frac{\mathfrak{S}(\mathfrak{f} \eta)}{\mathfrak{S}(\eta)} \text{ eine ganze Zahl ist.}$$

Wählt man $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$ relativ prim zueinander und wird eine der Kongruenz $\mathfrak{f}_2 \mathfrak{f} \equiv 1 \ (\mathfrak{f}_1)$ genügende Zahl $\mathfrak{f}_2$ bestimmt, die man stets $\not\equiv 0 \ (\sqrt{-3})$ annehmen kann, so ist nach dem vorigen auch

$$\frac{\mathfrak{S}(\eta \mathfrak{f} \mathfrak{f}_2)}{\mathfrak{S}(\eta \mathfrak{f})} = \frac{\mathfrak{S}(\eta)}{\mathfrak{S}(\eta \mathfrak{f})} \text{ eine ganze Zahl.}$$

Daher ist $\frac{\mathfrak{S}(\eta \mathfrak{f})}{\mathfrak{S}(\eta)}$ eine Einheit.

Da hier von $\mathfrak{f}$ nur die Klasse (mod $\mathfrak{f}_1$) in Betracht kommt, kann die Bedingung $\mathfrak{f} \not\equiv 0 \ (\sqrt{-3})$ nachträglich wieder fallen gelassen werden. Es gilt also (nach Vertauschung von $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$) der

Satz: Ist $\eta = \frac{\nu}{\mathfrak{f}}$ irgend eine gebrochene Zahl des Körpers $k(\varrho)$, wo $\mathfrak{f} \not\equiv 0 \ (\sqrt{-3})$, so sind alle Zahlen $\mathfrak{S}(\mathfrak{f}_1 \eta)$ miteinander assoziiert, wenn $\mathfrak{f}_1$ irgend welche zu $\mathfrak{f}$ prime ganze Zahlen durchläuft.

Aus (5.) ergibt sich für $z = \frac{\nu}{\mathfrak{f}\sqrt{-3}}$:

$$(8.)\quad \mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)\mathfrak{S}^3 - 3\,\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)\mathfrak{S}^2 + 3\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right) - 9\right)\mathfrak{S} - \mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right) = 0.$$

Setzt man $\mathfrak{f} \not\equiv 0 \ (\sqrt{-3})$ voraus, dann ist eine der drei Wurzeln dieser Gleichung assoziiert mit $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)$; sie sei $E\,\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)$, wo mit E hier wie im folgenden eine Einheit bezeichnet werde. Die linke Seite von (8.) wird dann nach Division durch $\mathfrak{S} - E\,\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)$ zu

$$(9.)\quad \mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)\mathfrak{S}^2 + \alpha\,\mathfrak{S} + E_1, \qquad (\alpha \text{ eine ganze Zahl}),$$

d. h. es ist $\dfrac{1}{\mathfrak{S}\left(\dfrac{\nu}{\mathfrak{f}\sqrt{-3}}\right)}$ eine ganze Zahl ($\mathfrak{f} \not\equiv 0 \ (\sqrt{-3})$). Ihre Norm ist (nach früherem) $\varepsilon\,\mathfrak{l}$, wenn $\mathfrak{f} = \mathfrak{l}^u$, oder ε_1, wenn $\mathfrak{f}$ zwei verschiedene Primfaktoren enthält.

Nunmehr zeigt sich auch, daß $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}'}\right)$ auch dann stets eine Einheit ist, wenn $\mathfrak{f}' \equiv 0 \ (3)$. Denn ist $\mathfrak{f}' = \mathfrak{f}\sqrt{-3}$, $\frac{\mathfrak{f}'}{3} \not\equiv 0 \ (\sqrt{-3})$, so kann man in der Gleichung (8.), die die Wurzel $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}'}\right)$ besitzt, mit der ganzen Zahl $\dfrac{1}{\mathfrak{S}\left(\dfrac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)}$, (da $\mathfrak{f} \not\equiv 0 \ (\sqrt{-3})$), erweitern, so daß Absolutglied und Koeffizient des höchsten Gliedes Einheiten (± 1) werden. Dasselbe folgt, wenn $\sqrt{-3}$ in $\mathfrak{f}'$ in der n-ten Potenz aufgeht, durch vollständige Induktion aus Gleichung (8.).

Wir wollen nun, für beliebiges $\mathfrak{f}$, unter $T_{\mathfrak{f}}$ stets eine Funktion mit ganzzahligen Koeffizienten ohne gemeinschaftlichen Teiler (d. h. eine „primitive Funktion") verstehen. Für $\mathfrak{f} \not\equiv 0 \ (\sqrt{-3})$ ist dann der Koeffizient der höchsten Potenz eine Einheit, (wir wählen sie $= 1$), dagegen für $\mathfrak{f} \equiv 0 \ (\sqrt{-3})$ das konstante Glied. Zur rascheren Orientierung über die Resultate dieses Abschnittes über die Normen der Teilungszahlen diene die folgende

Übersicht:

	$\mathfrak{f} = \mathfrak{l}^u$	$\mathfrak{f} = \sqrt{-3}^u$	$\mathfrak{f} = \sqrt{-3}\,\mathfrak{l}^u$	$\mathfrak{f} = \mathfrak{l}_1^{u_1} \cdots \mathfrak{l}_r^{u_r}$, $\mathfrak{l}_i \not\equiv \sqrt{-3}$, $u_1 u_2 > 0$ od. $\mathfrak{l}_1 = \sqrt{-3}$, $u_2 u_3 > 0$
	$\mathfrak{l} \not\equiv \sqrt{-3}$, $\mathfrak{f} \not\equiv 2$		$\mathfrak{l} \not\equiv \sqrt{-3}$	od. $\mathfrak{f} \equiv 0 \ (3)$ / $\mathfrak{f} = 2$
Koeff. d. höchst. Pot.	1	1	$\varepsilon\,\mathfrak{l}$	ε / 1
Absolutes Glied v. $T_{\mathfrak{f}}$	$\varepsilon\,\mathfrak{l}$	± 1	1	1 / -4

(Vgl. auch die Tabelle am Schlusse dieser Arbeit.)

Nun könnte man auch leicht den Wert der Konstanten k in der Formel A. 1. (1.) für $\mathfrak{f} \equiv 0\ (\sqrt{-3})$ als $\mathfrak{f}^6$ nachweisen; wir werden aber diese Formel in Zukunft in etwas veränderter Form schreiben, indem wir die Funktionen $\Phi_\mathfrak{f}$ und $\psi_\mathfrak{f}$ in ein Produkt von Teilungsfunktionen zerlegen. Es wird dann nach der soeben näher bestimmten Definition der Funktion $T_\mathfrak{f}$:

$$(10.)\quad \frac{\mathfrak{S}(\mathfrak{f}z)}{\mathfrak{S}(z)} = k' \frac{\prod_\alpha^{6} T_\alpha(\mathfrak{S}) \cdot P_2^3}{\prod_\beta^{3} T_{\sqrt{-3}^{s+1}\beta}(\mathfrak{S})}, \qquad \begin{cases} P_2 = 1, & \text{wenn } \mathfrak{f} \not\equiv 0\ (2) \\ P_2 = \mathfrak{S} - 4, & \text{wenn } \mathfrak{f} \equiv 0\ (2) \end{cases},$$

wo im Zähler die α sämtliche Teiler von $\mathfrak{f}$ (einschließlich $\mathfrak{f}$) durchlaufen (aber $\alpha \neq 2$), und die β im Nenner sämtliche Teiler von $\mathfrak{f}_1$, wenn $\mathfrak{f} = \sqrt{-3}^s \mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_1 \not\equiv 0\ (\sqrt{-3})$. Hier bestimmt sich die Konstante k' nach der obigen Übersicht (für $z = 0$, $\mathfrak{S} = 0$), da die linke Seite von (10.) $\mathfrak{f}^6$ wird, als $k' = \pm \sqrt{-3}^{6s}$; wenn also $\mathfrak{f} \not\equiv 0\ (\sqrt{-3})$, so ist $k' = \pm 1$.

4. *Die Zerlegung der Primideale ersten Grades von $k(\varrho)$ im Teilungskörper.* *Satz:* Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Primideal (π) vom ersten Grade in $k(\varrho)$ im Körper $K(\mathfrak{f})$ in Primideale vom Grade e zerfalle, ist die, daß e der kleinste Exponent ist, für den

$$(1.)\qquad \underline{\pi^e \equiv \varepsilon\ (\mathfrak{f})},$$

d. h. für den (π^e) in der Hauptklasse (mod $\mathfrak{f}$) liegt.

Dabei sind höchstens das Ideal $(\sqrt{-3})$ und die in $\mathfrak{f}$ enthaltenen Primideale ersten Grades auszunehmen.

Der Beweis dieses Satzes kann ganz entsprechend wie bei *Weber* (Alg. III, S. 594—596; es ist dort nur der Fall $e = 1$ betrachtet) geführt werden. Statt der dortigen Relation (6.) gilt hier, wenn

$$\frac{\mathfrak{S}(\pi z)}{\mathfrak{S}(z)} = \frac{\Phi^6}{\psi^3},\quad (\pi \neq 2 \neq \sqrt{-3})$$

gesetzt wird, die Kongruenz

$$3(\psi' \Phi - 2\Phi' \psi) + \mathfrak{S}\Phi\psi \equiv 0\ (\pi),$$

und hieraus folgert man genau wie dort, daß in

$$\Phi = \mathfrak{S}^n + \alpha_1 \mathfrak{S}^{n-1} + \cdots + \varepsilon\pi, \qquad \psi = \pi\mathfrak{S}^{2n} + \beta_1 \mathfrak{S}^{2n-1} + \cdots + \bar{\varepsilon}, \qquad \left(n = \frac{p-1}{6},\ p = n(\pi)\right),$$

(s. Übersicht und Formel (10.) des vorhergehenden Abschnittes), alle Koeffizienten α und β durch π teilbar sind, (s. auch die Tabelle am Schluß dieser Arbeit) [1]).

Daraus ergibt sich die Kongruenz

$$(2.)\qquad \mathfrak{S}\left(\pi \frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right) \equiv \mathfrak{S}^p\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right) \qquad (\pi)$$

oder, wenn $\mathfrak{f} \equiv 0\ (\sqrt{-3})$:

$$(2\text{ a.})\qquad \frac{1}{\mathfrak{S}\left(\pi \frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)} \equiv \left(\frac{1}{\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)}\right)^p \qquad (\pi).$$

---

[1]) Einen einfachen Beweis dieser Tatsache s. *Takenouchi*, loc. cit.

Sei nun $\pi^e \equiv \varepsilon\ (\mathfrak{f})$ und e der kleinste Exponent, für den eine solche Kongruenz besteht. Wir bestimmen in der zu (π) inversen Klasse (mod $\mathfrak{f}$) ein Ideal (μ), wo also $\mu\pi \equiv \varepsilon\ (\mathfrak{f})$. Da in den Kongruenzen (2.) resp. (2 a.) (ν) beliebig, nur zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd ist, so ergeben dieselben, indem ν sukzessive durch $\nu\mu$, $\nu\mu^2 \ldots$ ersetzt wird:

$$(3.) \qquad \mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right) \equiv \mathfrak{S}^p\left(\frac{\nu\mu}{\mathfrak{f}}\right) \equiv \mathfrak{S}^{p^2}\left(\frac{\nu\mu^2}{\mathfrak{f}}\right) \equiv \cdots \equiv \mathfrak{S}^{p^e}\left(\frac{\nu\mu^e}{\mathfrak{f}}\right) \qquad (\pi).$$

Da aber $\mu^e \equiv \varepsilon\ (\mathfrak{f})$, so ist mithin

$$(4.) \qquad \mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right) \equiv \mathfrak{S}^{p^e}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right) \qquad (\pi).$$

Da $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{f}\right)$ eine erzeugende Zahl des Relativkörpers $K\ (\mathfrak{f})$ und (π) vom ersten Grad in $k\ (\varrho)$ ist, sodaß für eine Zahl γ von $k\ (\varrho)$, deren Nenner zu π relativ prim ist, $\gamma \equiv \gamma^p\ (\pi)$, so ist auch für irgend eine ganze Zahl A von $K\ (\mathfrak{f})$

$$A \equiv A^{p^e} \quad (\pi),$$

wenn π nicht in der Diskriminante der Zahl $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)$ aufgeht. Folglich ist der Grad e_1 eines in (π) enthaltenen Primideals $\mathfrak{P}$ des Körpers $K\ (\mathfrak{f})$ höchstens gleich e, $\underline{e_1 \leq e}$.

Wäre aber $e_1 < e$, so müßte wegen

$$\mathfrak{S}\left(\frac{\nu\mu^{e_1}}{\mathfrak{f}}\right) \equiv \mathfrak{S}^{p^{e_1}}\left(\frac{\nu\mu^{e_1}}{\mathfrak{f}}\right) \qquad (\mathfrak{P})$$

nach (3.) $$\mathfrak{S}\left(\frac{\nu\mu^{e_1}}{\mathfrak{f}}\right) \equiv \mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right) \qquad (\mathfrak{P}) \qquad \text{sein.}$$

$\mathfrak{S}\left(\frac{\nu\mu^{e_1}}{\mathfrak{f}}\right) - \mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)$ ist aber, wenn $\mu^{e_1} \not\equiv \varepsilon\ (\mathfrak{f})$, ein Teiler der Diskriminante der Teilungsgleichung, die nach dem nächsten Kapitel nur die Primteiler von $\mathfrak{f}$ und $\sqrt{-3}$ als Primfaktoren enthält. Werden dieselben ausgeschlossen, so ist die Annahme $e_1 < e$ unmöglich und daher $\underline{e_1 = e}$, wodurch der Satz bewiesen ist.

B. Die Relativdiskriminante des Körpers $K\ (\mathfrak{f})$.

Zugrunde gelegt ist der Körper $k\ (\varrho)$. Der Körper $K\ (\mathfrak{f})$ ist in A. 2. als $k\left(\varrho, \mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)\right)$ definiert worden.

In diesem Kapitel wird bewiesen der

Satz: Die Relativdiskriminante der Körper $K\ (\mathfrak{f})$, deren Relativgrad > 1, enthält alle und nur die Primteiler von $\mathfrak{f}$.

1. $\mathfrak{f} \not\equiv 0\ (\sqrt{-3})$, $\mathfrak{f} = \mathfrak{l}_1^{u_1} \cdots \mathfrak{l}_r^{u_r}$.

Aus der in A. 3. bewiesenen Tatsache, daß die Wurzeln der Teilungsgleichung miteinander assoziiert sind und daß, für $\mathfrak{f} = \mathfrak{l}^u$, $\mathfrak{l} \neq \sqrt{-3}$ ihr Produkt $\varepsilon\,\mathfrak{l}$ ist (ausgenommen für $\mathfrak{f} = 2$, $\mathfrak{S}\left(\frac{1}{2}\right) = 4$), ergibt sich die Darstellung $\mathfrak{l} = \mathfrak{L}^n$, $n = \frac{1}{e}\varphi\left(\mathfrak{l}^u\right)$, $\mathfrak{L} = \left(\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{l}^u}\right)\right)$, woraus folgt, daß erstens der Relativgrad des Körpers nicht kleiner als n sein kann, $T_{\mathfrak{l}^u}$ also irreduzibel ist in $k\ (\varrho)$, zweitens, daß $\mathfrak{L}$ ein ambiges Primideal in $K\ (\mathfrak{l}^u)$ ist, und drittens, daß $\mathfrak{l}$ in der Relativdiskriminante des Körpers $K\ (\mathfrak{l}^u)$

enthalten ist. Da der Körper $K(\mathfrak{f})$, $\mathfrak{f} = \mathfrak{l}_1^{u_1} \cdots \mathfrak{l}_r^{u_r}$ die Körper $K(\mathfrak{l}_i^{u_i})$ enthält, so ergibt sich die Richtigkeit des ersten Teils des zu beweisenden Satzes. Nur wenn ein $\mathfrak{l}_i = 2$, $u_i = 1$ oder $\mathfrak{l}_i = (2\varrho + 3)$, $u_i = 1$, muß sie für die Primzahl $\mathfrak{l}_i$ noch erwiesen werden, weil $K(2) = K(2\varrho + 3) = k(\varrho)$. Ist also zunächst

a.) $\mathfrak{f} = 2\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_1 \not\equiv 0\ (2)$, so hat man nach A. 3. (10.):

$$\frac{\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{2\mathfrak{f}_1}\right)}{\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{2}\right)} = \left[\frac{\mathfrak{S}(z)}{\mathfrak{S}(\mathfrak{f}_1 z)}\right]_{z=\frac{\nu}{2\mathfrak{f}_1}} = R^3\left[\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{2\mathfrak{f}_1}\right)\right].$$

Da $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{2}\right) = 4$, $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{2\mathfrak{f}_1}\right)$ eine Einheit ist, (dies gilt auch noch für $\mathfrak{f}_1 \equiv 0\ (\sqrt{-3})$, nur muß $\mathfrak{f}_1 \neq \sqrt{-3}$ vorausgesetzt werden; s. die Übersicht am Schlusse von A. 3.), so wird (4) und damit auch (2) in $K(2\mathfrak{f}_1)$ die dritte Potenz eines Hauptideals; 2 ist also in der Relativdiskriminante enthalten. Ist

b.) $\mathfrak{f} = (2\varrho + 3)\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_1 \not\equiv 0\ (2\varrho + 3)$, so ist ganz entsprechend:

$$\frac{\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{(2\varrho+3)\mathfrak{f}_1}\right)}{\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{(2\varrho+3)}\right)} = \left[\frac{\mathfrak{S}(z)}{\mathfrak{S}(\mathfrak{f}_1 z)}\right]_{z=\frac{\nu}{(2\varrho+3)\mathfrak{f}_1}} = R^3\left[\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{2\varrho+3)\mathfrak{f}_1}\right)\right].$$

Man hat also wieder $(2\varrho + 3) = \mathfrak{L}^3$, da die linke Seite $\frac{E}{2\varrho+3}$ wird, d. h. $(2\varrho + 3)$ ist in der R. D. enthalten. (Auch dies gilt, wenn $\mathfrak{f}_1 \equiv 0\ (\sqrt{-3})$, $\mathfrak{f}_1 \neq \sqrt{-3}$. Ist $\mathfrak{f}_1 = \sqrt{-3}$, so sieht man direkt aus der Tabelle am Schluß dieser Arbeit, daß $(2\varrho + 3)$ in der Diskr. von $T_{\sqrt{-3}(2\varrho+3)}$ in der ersten Potenz, also auch in der Körperdiskr. enthalten ist).

Der Beweis des zweiten Teils des obigen Satzes gelingt mit Hilfe des folgenden merkwürdigen Satzes:

Satz: Setzt man in $T_{\mathfrak{f}_1}(\mathfrak{S}(z))$ für z irgend eine gebrochene Zahl $n = \frac{\nu}{\mathfrak{f}}$ von $k(\varrho)$, deren Nenner $\mathfrak{f} \not\equiv 0\ (\sqrt{-3})$, $\mathfrak{f} \neq \mathfrak{f}_1$, so nimmt die Funktion $T_{\mathfrak{f}_1}(\mathfrak{S})$ einen Zahlwert an, der außer dem Faktor $\sqrt{-3}^{3r}$, (falls $\mathfrak{f}_1$ mindestens einen von $\sqrt{-3}$ verschiedenen Teiler enthält), oder $\sqrt{-3}^{3r-1}$, (falls $\mathfrak{f}_1 = \sqrt{-3}^{u}$), höchstens noch solche Idealfaktoren enthält, die im gemeinsamen Teiler von $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$ aufgehen. Hierbei ist $r = \frac{1}{6}\varphi(\mathfrak{f}_1)$ der Grad von $T_{\mathfrak{f}_1}(\mathfrak{S})$.

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf folgenden

Hilfssatz: Zwischen den Funktionen $T_{\mathfrak{f}}(x)$ und $T_{\mathfrak{f}\sqrt{-3}}(x)$ besteht folgende Beziehung:

(1.)
$$\alpha.)\ (x-1)^{3r} \cdot T_{\mathfrak{f}}\left[x\left(\frac{3}{x-1}\right)^3\right] \equiv \pm T_{\mathfrak{f}\sqrt{-3}}(x), \qquad \text{wenn } \mathfrak{f} \equiv 0\ (\sqrt{-3}),$$

$$\beta.)\ (x-1)^{3r} \cdot T_{\mathfrak{f}}\left[x\left(\frac{3}{x-1}\right)^3\right] \equiv \varepsilon\, T_{\mathfrak{f}\sqrt{-3}}(x)\, T_{\mathfrak{f}}(x), \text{ wenn } \mathfrak{f} \not\equiv 0\ (\sqrt{-3}).$$

Dabei ist $r = \frac{1}{6}\varphi(\mathfrak{f})$ der Grad von $T_{\mathfrak{f}}(x)$, $\mathfrak{f} \neq 2$.

Ist nämlich $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right) = y$ eine Wurzel der Gleichung $T_\mathfrak{f}(y) = 0$, dann genügen die drei voneinander verschiedenen Zahlen

$$x_1 = \mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}\sqrt{-3}}\right),\quad x_2 = \mathfrak{S}\left(\frac{\nu+\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}\sqrt{-3}}\right),\quad x_3 = \mathfrak{S}\left(\frac{\nu-\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}\sqrt{-3}}\right)$$

der Relation

$$\frac{y}{x} = \left(\frac{3}{x-1}\right)^3,$$

(s. A. 3. (4.) und die an diese Formel daselbst geknüpften Folgerungen). Die Gleichung

$$T_\mathfrak{f}(y) \equiv T_\mathfrak{f}\left[x\left(\frac{3}{x-1}\right)^3\right] = 0$$

oder, um die Brüche wegzuschaffen,

$$(x-1)^{3r}\, T_\mathfrak{f}\left[x\left(\frac{3}{x-1}\right)^3\right] = 0$$

enthält daher jedenfalls alle Wurzeln von $T_{\mathfrak{f}\sqrt{-3}}(x) = 0$. Der Grad von $(x-1)^{3r}\, T_\mathfrak{f}\left[x\left(\frac{3}{x-1}\right)^3\right]$ ist $3r$. Ist also $\mathfrak{f} \equiv 0\ (\sqrt{-3})$, so stimmt er überein mit dem Grade von $T_{\mathfrak{f}\sqrt{-3}}(x)$, und die Übereinstimmung des Absolutgliedes (± 1; s. die Übersicht in A. 3.) zeigt die Richtigkeit der Behauptung. Ist dagegen $\mathfrak{f} \not\equiv 0\ (\sqrt{-3})$, so ist für jeden Wert ν eine der drei Zahlen x_1, x_2, x_3 eine Wurzel von $T_\mathfrak{f}(x) = 0$, und die Vergleichung der Grade — ($T_{\mathfrak{f}\sqrt{-3}}$ ist hier vom Grade $2r$) — sowie der Absolutglieder zeigt auch hier das Bestehen der Relation (1.).

Um nun den Satz über die Werte der Funktion $T_{\mathfrak{f}_1}(\mathfrak{S})$ zu beweisen, unterscheiden wir folgende Fälle:

a.) $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{l} \neq \sqrt{-3},\ \neq 2$,

wo unter ($\mathfrak{l}$) wie überall in dieser Arbeit ein Primideal (ersten oder zweiten Grades) von $k(\varrho)$ verstanden wird.

Nach A. 3. (10.) ist

$$\frac{\mathfrak{S}(\mathfrak{l}\, z)}{\mathfrak{S}(z)} = \pm \frac{T_\mathfrak{l}^6(\mathfrak{S}(z))}{T_{\mathfrak{l}\sqrt{-3}}^3(\mathfrak{S}(z))}, \tag{2.}$$

und dies ist nach dem Hilfssatz (Formel (1.) β.)):

$$\frac{\mathfrak{S}(\mathfrak{l}\, z)}{\mathfrak{S}(z)} = \pm \frac{T_\mathfrak{l}^9(x)}{(x-1)^{9r}\, T_\mathfrak{l}^3(y)},\ [r = \tfrac{1}{6}\varphi(\mathfrak{l})], \tag{3.}$$

wenn wir zur Abkürzung wieder $x = \mathfrak{S}(z)$, $y = x\left(\frac{3}{x-1}\right)^3$ $(= \mathfrak{S}(\sqrt{-3}\, z))$ setzen.

Setzt man nun $z = \frac{\nu}{\mathfrak{f}}$, $\mathfrak{f} \neq \mathfrak{l}$ $\left(x = \mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right),\ y = \mathfrak{S}\left(\frac{\nu\sqrt{-3}}{\mathfrak{f}}\right)\right)$, wo ν eine beliebige zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde ganze Zahl in $k(\varrho)$ bedeute, so wird die linke Seite von (3.), falls $\mathfrak{f} \not\equiv 0\ (\mathfrak{l})$, der Quotient zweier Wurzeln der Teilungsgleichung $T_\mathfrak{f} = 0$ und somit eine Einheit. Ist dagegen $\mathfrak{f} \equiv 0\ (\mathfrak{l})$, so kann dieser Quotient (s. Abschnitt A. 3. über die Normen der Teilungszahlen) ein in $\mathfrak{l}$ enthaltenes Hauptideal sein. Er werde allgemein mit (I) bezeichnet. Aus (3.) ergibt sich dann:

$$(4.) \qquad \sqrt[3]{I} = I_1 = \pm \frac{T_1^3(x)}{(x-1)^{3r}\, T_1(y)}.$$

Aus

$$\frac{\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)}{\mathfrak{S}\left(\frac{\nu\sqrt{-3}}{\mathfrak{f}}\right)} = E = \left(\frac{\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)-1}{3}\right)^3 \text{ (s. A. 3. (4.))},$$

wo E eine Einheit bezeichnet, folgt

$$(x-1)^{3r} = 3^{3r} E^r = 3^{3r} E_1,$$

und Gleichung (4.) wird, wenn $I_1 E_1 = I_2$ gesetzt wird,

$$(5.) \qquad 3^{3r} I_2\, T_1\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\nu\sqrt{-3}}{\mathfrak{f}}\right)\right) = \pm\, T_1^3\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)\right),$$

wo I_2 höchstens in $(\mathfrak{l}, \mathfrak{f})$ aufgehende Primfaktoren enthält.

Bildet man diese Beziehung für alle primitiven Idealklassen (ν) (mod $\mathfrak{f}$), so erhält man durch Multiplikation, da mit (ν) auch $(\nu\sqrt{-3})$ sämtliche Klassen durchläuft, eine Idealgleichung in $k(\varrho)$ von der Form:

$$3^{3rn}\, \mathfrak{i}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^3, \text{ d. h. } 3^{3rn}\, \mathfrak{i} = \mathfrak{a}^2.$$

Daraus ersieht man, daß $\mathfrak{a}$ und damit $T_1\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)\right)$ keine Primfaktoren enthält, die nicht in $3\,\mathfrak{l}$ enthalten sind.

Der Zahlwert $T_1\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)\right) = Q$ muß nun in bezug auf die in ihm enthaltenen Primfaktoren von $\sqrt{-3}$ genauer untersucht werden. Ich bezeichne das Hauptideal $\left(T_1\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\nu\sqrt{-3}^h}{\mathfrak{f}}\right)\right)\right)$ mit $\mathfrak{Q}^{(h)}$. Die Gleichung (5.) lautet dann als Idealgleichung:

$$(6.) \qquad 3^{3r}\, \mathfrak{J}_2\, \mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}^3.$$

Es sei $\qquad \sqrt{-3} = \mathfrak{P}_1^{\sigma_1} \cdots \mathfrak{P}_m^{\sigma_m}$

$\mathfrak{Q}^{(h)}$ enthalte den Faktor $\mathfrak{P}_i$ genau in der $n_i^{(h)}$-ten Potenz. Es wird dann, da $\mathfrak{P}_i$ prim ist zu I_2,

$$6\, r\, \sigma_i + n_i' = 3\, n_i, \quad n_i' = 3\, n_i - 6\, r\, \sigma_i.$$

Ersetzt man ν durch $\nu\sqrt{-3}$, $\nu\sqrt{-3}^2$, ... usw., wo stets die in der der Gleichung (6.) entsprechenden Relation auftretenden Ideale $\mathfrak{J}_2^{(h)}$ prim zu $\mathfrak{P}_i$ sind, so erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&6\, r\, \sigma_i + n_i'' = 3\, n_i', && n_i'' = 3\, n_i' - 6\ \sigma_i = 9\ n_i - 24\, r\, \sigma_i;\\
&6\, r\, \sigma_i + n_i''' = 3\, n_i'', && n_i''' = 3\, n_i'' - 6\, r\, \sigma_i = 27\, n_i - 78\, r\, \sigma_i;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&6\, r\, \sigma_i + n_i^{(h)} = 3\, n_i^{(h-1)}, && n_i^{(h)} = 3^h\, n_i - 3\,(3^h - 1)\, r\, \sigma_i.
\end{aligned}$$

Ist s der kleinste Exponent, für den $\sqrt{-3}^s \equiv \varepsilon\ (\mathfrak{f})$, so wird $\mathfrak{Q}^{(s)} = \mathfrak{Q}$, $n_i^{(s)} = n_i$, also $n_i\,(3\ - 1) = 3\,(3^s - 1)\, r\, \sigma_i$, $\quad n_i = 3\, r\, \sigma_i$.

Es enthält also $\mathfrak{Q}$ den Faktor $\sqrt{-3}^{3r}$, und der Quotient $\frac{\mathfrak{Q}}{\sqrt{-3}^{3r}} = \mathfrak{J}'$ ist prim zu 3 und enthält höchstens Primteiler von $(\mathfrak{f}, \mathfrak{l})$.

Gleichzeitig bemerkt man nach (2.), (wenn man dort $z = \frac{\nu}{\mathfrak{f}}$ eingesetzt denkt), daß der Satz auch für $T_{1\sqrt{-3}}(\mathfrak{S})$ gilt, da $T_{1\sqrt{-3}}(\mathfrak{S})$ vom doppelten Grad ist wie $T_1(\mathfrak{S})$.

b.) $\underline{\mathfrak{f}_1 = 2.}$

Hier hat man statt (2.) die Formel (s. A. 3. (2.))

$$(7.) \qquad \frac{\mathfrak{S}(2z)}{\mathfrak{S}(z)} = -\left(\frac{\mathfrak{S}-4}{2\,\mathfrak{S}+1}\right)^3$$

und statt (1.) ist, da $T_2(x) \equiv x - 4$, $T_{2\sqrt{-3}} \equiv 2x + 1$,

$$(x-1)^3\, T_2\left(x\left(\frac{3}{x-1}\right)^3\right) \equiv 4x^3 - 12x^2 - 15x - 4 \equiv T^2_{2\sqrt{-3}}(x)\, T_2(x)$$
$$\equiv (x-1)^3\, T_2(y).$$

Für $z = \frac{\nu}{\mathfrak{f}}$ wird die linke Seite von (7.) eine Einheit; wenn $\mathfrak{f} \equiv 0$ (2) kann es ein in 2 enthaltener Faktor sein. Es ist daher

$$(8.) \qquad T_2(x) = I\, T_{2\sqrt{-3}}(x) \quad \text{für } x = \mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right),$$

wo I in $(\mathfrak{f}, 2)$ enthalten ist. Da auch hier, wie bei a.),

$$(x-1)^3 = 3^3 E,$$

so hat man wieder (entsprechend Gleichung (5.)):

$$3^3 I_1\, T_2\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\nu\sqrt{-3}}{\mathfrak{f}}\right)\right) = T^3_2\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)\right), \quad (I_2 \text{ in } (\mathfrak{f}, 2) \text{ enthalten}),$$

so daß derselbe Schluß wie in a.) gilt. Auch hier gilt der Satz nach (8.) auch für $T_{2\sqrt{-3}}(\mathfrak{S})$.

c.) $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{l}_1^{u_1} \cdots \mathfrak{l}_r^{u_r} \not\equiv 0\ (\sqrt{-3})$.

Es ist nach A. 3. (10.)

$$(9.) \qquad \frac{\mathfrak{S}\left(\mathfrak{f}_1 \frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)}{\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)} = \pm \frac{T^6_{\mathfrak{f}_1} \cdot T^6_{\alpha_1} \cdots P^3_2}{T^3_{\mathfrak{f}_1\sqrt{-3}} \cdot T^3_{\alpha_1\sqrt{-3}} \cdots},$$

wo die α im Zähler und Nenner sämtliche Teiler von f_1 durchlaufen (im Zähler außer $\alpha = 2$). Wir beweisen den Satz für $U = u_1 + u_2 + \cdots + u_r$ unter der Voraussetzung, daß er für $U - 1$ gilt. Für $U = 1$ ist er aber bewiesen; also gilt er dann allgemein für $\mathfrak{f}_1 \not\equiv 0\ (\sqrt{-3})$.

In der Multiplikationsformel (9.) heben sich dann nach Voraussetzung alle in $\frac{T^6_\alpha}{T^3_{\alpha\sqrt{-3}}}$ enthaltenen Primfaktoren von $\sqrt{-3}$, wenn die α echte Teiler von $\mathfrak{f}_1$ sind, weg; (es können nur noch solche Idealfaktoren übrig bleiben, die in $(\alpha, \mathfrak{f})$, also auch in $(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f})$ aufgehen). Man hat daher wieder, indem man auf beiden Seiten von (9.) die dritte Wurzel zieht:

$$I_1\, T^2_{\mathfrak{f}_1}\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)\right) = I_2\, T_{\mathfrak{f}_1\sqrt{-3}}\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)\right),$$

wo die Primfaktoren von I_1 und I_2 in $(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f})$ enthalten sind. Aus dem Hilfssatz (1.) β.) folgt dann wieder (entsprechend der Gleichung (5.)):

$$3^{3r} I_3 T_{\mathfrak{f}_1}\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\nu\sqrt{-3}}{\mathfrak{f}}\right)\right) = \pm I_4 T^3_{\mathfrak{f}_1}\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)\right), \quad r = \tfrac{1}{6}\varphi(\mathfrak{f}_1),$$

und die gleichen Schlüsse wie in a.) führen auch hier zum vollständigen Beweis.

d.) $\mathfrak{f}_1 = \sqrt{-3}^u$.

Wir setzen fest:

$$T_{\sqrt{-3}} \equiv 1, \quad \left(\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\sqrt{-3}}\right) = \infty\right).$$

Ferner ist $T_3(\mathfrak{S}) \equiv \mathfrak{S} - 1 = 3E$, falls $\mathfrak{S}(z) = \mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)$, $\mathfrak{f} \not\equiv 0 (\sqrt{-3})$ (s. A. 3. (4.)).

Hier könnte man von der Formel (1.) α.), die eine Rekursionformel liefern würde, ausgehen; eine direktere Rekursionsbeziehung ergibt sich aber aus

$$\frac{\mathfrak{S}\left(\sqrt{-3}^u \frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)}{\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)} = \pm \sqrt{-3}^{6u} \frac{T^6_{\sqrt{-3}^u} T^6_{\sqrt{-3}^{u-1}} \cdots T^6_3 T^6_{\sqrt{-3}}}{T^3_{\sqrt{-3}^{u+1}}}$$

(s. A. 3. (10.)), wo die auf der rechten Seite auftretenden Teilungsfunktionen für das Argument $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)$ zu bilden sind. Aus dieser Gleichung folgt (durch Ausziehen der dritten Wurzel), da die linke Seite eine Einheit ist:

$$T_{\sqrt{-3}^{u+1}}\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)\right) = E \cdot 3^u (T_{\sqrt{-3}^u} \cdot T_{\sqrt{-3}^{u-1}} \cdots T_{\sqrt{-3}})^2,$$

woraus die Behauptung des Satzes leicht folgt unter Berücksichtigung, daß $r = 3^{u-2}$, also $\sqrt{-3}^{3r-1} = \sqrt{-3}^{3^{u-1}-1}$ und daß sie für $u = 2$ richtig ist; d. h. es ist allgemein

$$T_{\sqrt{-3}^u}\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)\right) = E \cdot \sqrt{-3}^{3r-1}.$$

e.) Enthält $\mathfrak{f}_1$ außer dem Primfaktor $\sqrt{-3}$ noch andere Primfaktoren, $\mathfrak{f}_1 = \sqrt{-3}^u \mathfrak{f}_1'$, $\mathfrak{f}_1' \not\equiv 0 (\sqrt{-3})$, so gilt wieder:

$$T_{\mathfrak{f}_1}\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)\right) = I \cdot \sqrt{-3}^{3r},$$

wo I in $(\mathfrak{f}_1', \mathfrak{f})$ enthalten ist.

Es braucht dies nur für $\mathfrak{f}_1' = \mathfrak{l}$ nachgewiesen zu werden, da man bei zusammengesetztem $\mathfrak{f}_1'$ genau wie bei c.) verfahren kann. Es sei also $\mathfrak{f}_1 = \sqrt{-3}^u \mathfrak{l}$.

Dann wird

$$\frac{\mathfrak{S}\left(\mathfrak{f}_1 \frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)}{\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)} = \pm \sqrt{-3}^{6u} \frac{T^6_{\sqrt{-3}^u \mathfrak{l}} \cdot T^6_{\sqrt{-3}^{u-1}\mathfrak{l}} \cdots T^6_{\mathfrak{l}} \cdot T^6_{\sqrt{-3}^u} \cdots T^6_{\sqrt{-3}}}{T_{\sqrt{-3}^{u+1}\mathfrak{l}} \cdot T^3_{\sqrt{-3}^{u+1}}}.$$

Ist $\mathfrak{l} = 2$, so tritt $T_{\mathfrak{l}}$ nur in der dritten Potenz auf. Man hat daher

$$I\, T_{\sqrt{-3}^{u+1}\mathfrak{l}}\, T_{\sqrt{-3}^{u+1}} = 3^u (T_{\sqrt{-3}^u \mathfrak{l}} \cdots T_{\mathfrak{l}}\, T_{\sqrt{-3}^u} \cdots T_3\, T_{\sqrt{-3}})^2,$$

wo I wieder in $(\mathfrak{l}, \mathfrak{f})$ enthalten ist, und für $\mathfrak{l} = 2$ $T_{\mathfrak{l}}$ nur in der ersten Potenz auftritt. Nach d.) ist somit

$$I\,T_{\sqrt{-3}^{u+1}\mathfrak{l}}\sqrt{-3}^{3^u-1} = 3^u\,(T_{\sqrt{-3}^u\mathfrak{l}}\cdots T_{\mathfrak{l}})^2\cdot 3^{(3^{u-1}-1)+(3^{u-2}-1)+\cdots+(3-1)},$$

$$\underline{I\,T_{\sqrt{-3}^{u+1}\mathfrak{l}} = (T_{\sqrt{-3}^u\mathfrak{l}}\cdots T_{\mathfrak{l}})^2,}$$

wo wieder für $\mathfrak{l}=2$ $T_{\mathfrak{l}}$ nur in der ersten Potenz vorkommt.

Nach a.) ist, wenn r_i der Grad von $T_{\sqrt{-3}^i\mathfrak{l}}$ ist:

$$T_{\sqrt{-3}^i\mathfrak{l}}\left(\wp\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)\right) = I_1\sqrt{-3}^{3ri}, \quad (i=1,0).$$

Da $r_1 = 2r_0$ (für $\mathfrak{l}=2$ ist $r_1 = r_0 = 1$), $r_{i+1} = 3r_i$ $(i \geqq 1)$, so wird, unter der Voraussetzung, daß die Behauptung für u richtig ist, (für $u=0$ und $u=1$ ist dies unter a.) bewiesen worden):

$$I_2\,T_{\sqrt{-3}^{u+1}\mathfrak{l}} = I_3\,3^{3(r_0+r_1+\cdots+r_u)}.$$

Ist nun $\mathfrak{l}\neq 2$, so wird dies gleich

$$I_3\,3^{3r_0(1+2+2\cdot 3+\cdots+2\cdot 3^{u-1})} = I_3\,3^{3^{u+1}r_0} = I_4\sqrt{-3}^{3r_{u+1}},$$

für $\mathfrak{l}=2$ hingegen gleich

$$I_3\,3^{3(r_1+\cdots+r_u)}\cdot\sqrt{-3}^3 = I_3\sqrt{-3}^3\,3^{3(1+3+\cdots+3^{u-1})} = I_4\sqrt{-3}^{3^{u+1}} = I_4\sqrt{-3}^{3r_{u+1}},$$

woraus in beiden Fällen die Richtigkeit der Annahme

$$T_{\sqrt{-3}^u\mathfrak{l}}\left(\wp\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)\right) = I\sqrt{-3}^{3r}, \qquad r = \tfrac{1}{6}\varphi(\sqrt{-3}^u\mathfrak{l})$$

folgt.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Nunmehr gehen wir über zum Beweis des zweiten Teils des Hauptsatzes über die Relativdiskriminante, immer noch unter der Voraussetzung $\mathfrak{f} \not\equiv 0\ (\sqrt{-3})$.

Wir betrachten die Funktion $\dfrac{\mathfrak{S}(z)-\mathfrak{S}(\omega z)}{\mathfrak{S}(\omega z)}$.

Dabei sei ω irgend eine nicht in $\mathfrak{f}$ aufgehende ganze Zahl des Körpers $k(\varrho)$, $(\omega \not\equiv 0\ (2) \not\equiv 0\ (\sqrt{-3}))$.

Die Funktion verschwindet, wenn

$$\varepsilon_i z \equiv \omega z\ (1,\varrho),$$

wo für ε_i alle sechs Einheiten von $k(\varrho)$ zu setzen sind, und hat Pole für

$$\omega z \equiv 0\ (1,\varrho).$$

Die Nullstellen sind also $z = \dfrac{\nu}{\omega-\varepsilon_i}$, wo (ν) sämtliche Klassen (mod $(\omega-\varepsilon_i)$) durchläuft mit Ausnahme von $\nu\equiv 0$ und derjenigen Werte, für die $z \equiv \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{-3}}\ (1,\varrho)$ wird. Für $z\equiv 0\ (1,\varrho)$ bleibt nämlich die Funktion endlich (sie nimmt den Wert $\dfrac{1-\omega^6}{\omega^6}$ an) und ebenso für $z\equiv\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{-3}}\ (1,\varrho)$, (wo sie den Wert ω^3-1 hat). Die Pole sind $z=\dfrac{\nu}{\omega}$, wo (ν) alle Klassen (mod ω) durchläuft, außer $\nu\equiv 0\ (\omega)$. Die Pole sind von 6. Ordnung, die Nullstellen von erster, außer wenn $\dfrac{\nu}{\omega-\varepsilon_i}\equiv\dfrac{\varepsilon'}{2}\ (1,\varrho)$. Denn damit eine Nullstelle von höherer Ordnung sei, muß gleichzeitig

$$(\alpha.)\quad \mathfrak{S}(z) - \mathfrak{S}(\omega z) = 0,$$
$$(\beta.)\quad \mathfrak{S}'(z) - \omega\,\mathfrak{S}'(\omega z) = 0 \qquad \text{sein.}$$

Nun ist $\mathfrak{S}(z) = \frac{g_3}{\wp^3(z)}$, $\mathfrak{S}'(z) = -\frac{3g_3}{\wp^4(z)}\wp'(z)$.

Die Bedingung ($\beta.$) lautet daher

$$-3g_3\left(\frac{\wp'(z)}{\wp^4(z)} - \frac{\omega\,\wp'(\omega z)}{\wp^4(\omega z)}\right) = 0$$

oder, da nach ($\alpha.$) $\wp(z) = \varrho^\sigma \wp(\omega z)$:

$$(\gamma.)\quad \wp'(z) - \varrho^\sigma \omega\,\wp'(\omega z) = 0.$$

Die Bedingung ($\alpha.$) erfordert $\varepsilon_i z \equiv \omega z\ (1, \varrho)$.
Es ist dann auch $\wp'(\varepsilon_i z) = \wp'(\omega z)$.

Die Funktion $\wp'(z)$ nimmt für z, ϱz, $\varrho^2 z$ denselben Wert an. Daher ist, da diese Funktion ungerade ist,

$$\wp'(\varepsilon_i z) = \pm\wp'(z),$$
also
$$\wp'(\omega z) = \pm\wp'(z),$$

was mit ($\gamma.$) unvereinbar ist, außer wenn $z = \frac{\nu}{2}$, $\wp' = 0$, was nachzuweisen war.

Diese Stelle ist für die Funktion $\frac{\mathfrak{S}(z) - \mathfrak{S}(\omega z)}{\mathfrak{S}(\omega z)}$ eine Nullstelle von genau zweiter Ordnung, wie man aus der Tatsache, daß sie für die Funktion $\mathfrak{S}'(z)$ eine Nullstelle erster Ordnung ist — (die anderen 7 Nullstellen sind $z = 0$ (5-fach), $z = \varrho\frac{\nu}{2}$, $z = \varrho^2\frac{\nu}{2}$) — leicht erkennt.

Somit wird, da auch $T_2(\mathfrak{S})$ von 2. Ordnung verschwindet,

$$(10.)\qquad \frac{\mathfrak{S}(z) - \mathfrak{S}(\omega z)}{\mathfrak{S}(\omega z)} = k\frac{\prod_\beta T_\beta(\mathfrak{S})}{\prod_\alpha T_\alpha^6(\mathfrak{S})}.$$

Dabei sind die β die sechs Zahlen $\omega - \varepsilon_i$ und ihre sämtlichen voneinander wesentlich verschiedenen (d. h. nicht assoziierten) Teiler, und α durchläuft alle Teiler von ω (ω einschließlich).

Wenn $\omega^6 - 1 = \prod_i(\omega - \varepsilon_i) = \sqrt{-3}^s\mu$, $\mu \not\equiv 0\ (\sqrt{-3})$, so ergibt sich (etwa aus $z = 0$, wo die linke Seite von (10.) den Wert $\frac{1-\omega^6}{\omega^6}$ annimmt, oder aus $z = \frac{1}{\sqrt{-3}}$, ($\mathfrak{S} = \infty$), wo sie $\omega^3 - 1$ wird):

$$\underline{k = \varepsilon\sqrt{-3}^s,}$$

wenn man die Resultate von Abschnitt A. 3. (vgl. insbesondere die dort gegebene Übersicht) berücksichtigt, sowie daß $\omega^6 - 1 \equiv 0\ (4)$.

Wir setzen nun $z = \frac{\nu}{\mathfrak{f}}$. $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right) - \mathfrak{S}\left(\omega\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)$ ist dann ein Faktor der Diskriminante von $T_\mathfrak{f} = 0$. Jeder Faktor derselben kann in dieser Form dargestellt werden, d. h. zu dem Ausdruck $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right) - \mathfrak{S}\left(\frac{\nu_1}{\mathfrak{f}}\right)$ kann man eine *Zahl* ω (mod $\mathfrak{f}$) so bestimmen, daß $\omega\nu \equiv \nu_1\ (\mathfrak{f})$, und $(\omega, 6) = (1)$.

Die linke Seite von (10.) wird dann eine ganze Zahl, da $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)$ und $\mathfrak{S}\left(\frac{\omega\nu}{\mathfrak{f}}\right)$ ganze, miteinander assoziierte Zahlen sind. Zähler und Nenner der rechten Seite von (10.) sind vom selben Grad n in $\mathfrak{S}(z)$. Der Nenner wird somit nach dem vorhergehenden Satz $\sqrt{-3}^{3n} E$. Nach demselben Satz enthält der Zähler außer Faktoren, die in $\mathfrak{f}$ enthalten sind und deren Produkt I sei, nur eine Potenz $\sqrt{-3}^{\sigma}$.

Von den sechs Zahlen $\pi - \varepsilon_i$ sind zwei durch $\sqrt{-3}^{1}$ und eine durch $\sqrt{-3}^{s-2}$ teilbar. Nun ist $T_{\sqrt{-3}}(x) \equiv 1$. Es kommen unter den β die Zahlen $\sqrt{-3}^{s-3}$, $\sqrt{-3}^{s-3} \cdots \sqrt{-3}^{2}$ vor. Die $s-3$ entsprechenden Werte T_β bewirken, daß der Zähler der rechten Seite von (10.) nur durch $\sqrt{-3}^{3n-(s-3)}$ teilbar ist (nach dem gleichen Satz). Mit Berücksichtigung des Wertes von k erkennt man jetzt, daß die rechte Seite von (10.) und damit die Differenz $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right) - \mathfrak{S}\left(\omega\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)$, (da $\mathfrak{S}\left(\omega\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)$ eine Einheit ist oder in $\mathfrak{f}$ aufgeht), in der Tat den Wert $\sqrt{-3}^{3} I'$ hat, wo I' nur solche Idealfaktoren enthält, die in $\mathfrak{f}$ enthalten sind. Die Diskriminante der Teilungsgleichung $T_{\mathfrak{f}} = 0$ ist mithin $\sqrt{-3}^{3r(r-1)} \cdot \mathfrak{i}$, $(r = \frac{1}{6}\varphi(\mathfrak{f}))$, wo $\mathfrak{i}$ nur die Primfaktoren von $\mathfrak{f}$ enthält.

Nach dem vorher bewiesenen Satz ist aber $T_2\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)\right) = \sqrt{-3}^{3} \bar{I}$, also $\dfrac{\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right) - 4}{\sqrt{-3}^{3}}$ eine ganze Zahl. Ihre Diskriminante ist aber nach dem soeben Bewiesenen prim zu 3, also auch die Relativdiskriminante des Körpers $K(\mathfrak{f})$, die somit nur die Primfaktoren von $\mathfrak{f}$ enthält. Damit ist für $\mathfrak{f} \not\equiv 0 \ (\sqrt{-3})$ dieser Hauptsatz vollständig bewiesen.

2. $\mathfrak{f} = \sqrt{-3}^{u}$.

Da $\mathfrak{S}\left(\frac{1}{\sqrt{-3}}\right) = \infty$, $\mathfrak{S}\left(\frac{1}{3}\right) = 1$, kann $u \geqq 3$ vorausgesetzt werden. Wir beweisen wieder zuerst, daß die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt{-3}^{u})$ den Faktor $\sqrt{-3}$ enthält. Dies folgt unmittelbar aus folgendem

Satz: Das Ideal $(\sqrt{-3})$ wird im Körper $K(\sqrt{-3}^{u})$ die n-te Potenz eines Primideals.

Hierbei ist $n = \frac{1}{6}\varphi(\sqrt{-3}^{u})$. Der Satz zeigt also zugleich die Irreduzibilität der Teilungsgleichung $T_{\sqrt{-3}^{u}}(\mathfrak{S}) = 0$.

Beweis: Aus der schon in A. 3. benutzten Formel

$$\frac{\mathfrak{S}(2z)}{\mathfrak{S}(z)} = -\left(\frac{\mathfrak{S}-4}{2\mathfrak{S}+1}\right)^3$$

folgt für $z = \dfrac{\nu}{\sqrt{-3}^{u}}$, $(\nu \not\equiv 0 \ (\sqrt{3}))$, da die linke Seite als Quotient zweier Einheiten (s. A. 3.) selbst eine solche wird:

(11.) $$\mathfrak{S} - 4 = E\,(2\,\mathfrak{S} + 1).$$

Andererseits ist

$$\frac{\wp'(\sqrt{-3}\,z)}{\wp'(z)} = \frac{2\,\mathfrak{S}+1}{\sqrt{-3}^3}$$

was man durch derivieren der Gleichung A. 3. (β.) erhält. Man hat also

(12.) $$\left(\frac{1+2\,\mathfrak{S}}{\sqrt{-3}^3}\right)^2 = \frac{4\,\wp^3(\sqrt{-3}\,z) - g_3}{4\,\wp^3(z) - g_3} = \frac{\mathfrak{S}(\sqrt{-3}\,z) - 4}{\mathfrak{S}(z) - 4} \cdot \frac{\mathfrak{S}(z)}{\mathfrak{S}(\sqrt{-3}\,z)},$$

mithin für $z = \frac{\nu}{\sqrt{-3}^u}$, in Verbindung mit (11.):

(13.) $$(\mathfrak{S} - 4)^3 = E_1\,3^3\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\sqrt{-3}^{u-1}}\right) - 4\right) \qquad (u \geqq 3),$$

wo $$E_1 = -E^2\,\frac{\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\sqrt{-3}^u}\right)}{\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\sqrt{-3}^{u-1}}\right)},$$

während für $u = 2$

$$\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{3}\right) - 4 = -3 \qquad \text{ist.}$$

Dies gibt für $u = 3$:

$$(\mathfrak{S} - 4)^3 = 3^4\,E'.$$

Wir beweisen nun die Richtigkeit einer Idealgleichung von der Form

(14.) $$\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\sqrt{-3}^r}\right) - 4\right)^{p_r} = (\sqrt{-3})^{q_r}, \quad q_r \not\equiv 0\ (3), \quad (p_r,\ q_r) = (1),$$

die somit für $r = 2$ und $r = 3$ nach dem vorigen besteht, durch den Schluß von r auf $r+1$, und bestimmen zudem die ganzen Zahlen p_r und q_r. Aus (13.) folgt aber unter der Annahme (14.) die Idealgleichung

$$\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\sqrt{-3}^{r+1}}\right) - 4\right)^{3p_r} = (\sqrt{-3})^{6p_r+q_r}$$

was die Richtigkeit des Ansatzes (14.) dartut, und zugleich erkennt man, daß

$$p_{r+1} = 3\,p_r, \quad q_{r+1} = 6\,p_r + q_r, \quad (p_{r+1},\ q_{r+1}) = (1), \quad q_{r+1} \not\equiv 0\ (3).$$

Da $p_2 = 1$, $q_2 = 2$, $p_3 = 3$, $q_3 = 8$, findet man leicht, daß

$$p_r = 3^{r-2}, \quad q_r = 3^{r-1} - 1,$$

(15.) $$\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\sqrt{-3}^u}\right) - 4\right)^{3^{u-2}} = (\sqrt{-3})^{3^{u-1}-1} \qquad (u \geqq 2).$$

Nun ist aber $3^{u-2} = \frac{1}{6}\,\varphi(\sqrt{-3}^u) = n$, somit

(16.) $$(\sqrt{-3}) = \mathfrak{L}^n, \quad \mathfrak{L} = \left(\frac{\sqrt{-3}^3}{\mathfrak{S}\left(\frac{1}{\sqrt{-3}^u}\right) - 4}\right).$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt{-3}^u)$ keine anderen Primfaktoren als $\sqrt{-3}$ enthält. Dies wird dann erwiesen sein, wenn gezeigt ist, daß die Relativdiskriminante von $K(\sqrt{-3}^r)$ in bezug auf

$K(\sqrt{-3}^{r-1})$ keine anderen als in $\sqrt{-3}$ enthaltene Primfaktoren enthält, da man dann für r sukzessive $3, 4, \ldots, u$ setzen kann.

Nun genügt $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\sqrt{-3}^{r}}\right)$ im Körper $K(\sqrt{-3}^{r-1})$ der Gleichung

$$(17.) \quad (\mathfrak{S}-1)^3 - (\mathfrak{S}-1)\frac{27}{\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\sqrt{-3}^{r-1}}\right)} - \frac{27}{\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\sqrt{-3}^{r-1}}\right)} = 0$$

(vgl. A. 3. (4.) oder (5.)).

Ihre Diskriminante ist

$$-\frac{27^3}{\mathfrak{S}^3\left(\frac{\nu}{\sqrt{-3}^{r-1}}\right)}\left[\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\sqrt{-3}^{r-1}}\right)-4\right] = 3^9 \cdot E \cdot \left[\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\sqrt{-3}^{r-1}}\right)-4\right].$$

Nach (15.) enthält die eckige Klammer nur ein in $\sqrt{-3}$ aufgehendes Primideal. Also enthält auch die Relativdiskriminante von $K(\sqrt{-3}^{u})$ nur den Primfaktor $\sqrt{-3}$.

3. $\underline{\mathfrak{f} = \sqrt{-3}^{s} \cdot \mathfrak{f}_1}$, $\mathfrak{f}_1 \not\equiv 0 \ (\sqrt{-3})$.

Ist $s \geqq 3$, so enthält der Körper $K(\mathfrak{f})$ den Körper $K(\sqrt{-3}^{3})$. Seine Relativdiskriminante enthält somit den Faktor $\sqrt{-3}$. Ebenso enthält sie (für beliebiges s) die Faktoren von $\mathfrak{f}_1$, wie unter 1. gezeigt worden ist. Es ist noch nachzuweisen, daß auch für $s = 1$ und $s = 2$ die Relativdiskriminante den Faktor $\sqrt{-3}$ enthält, ferner, daß dieselbe, bei beliebigem s, keine zu $\mathfrak{f}$ primen Faktoren besitzt.

Entsprechend der Gleichung (17.) besteht für die Zahl $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\sqrt{-3}^{s}\,\mathfrak{f}_1}\right)$ eine kubische Relativgleichung im Körper $K(\sqrt{-3}^{s-1}\,\mathfrak{f}_1)$, die jedenfalls für $s = 1$ reduzibel ist, (da $\varphi(\sqrt{-3}\,\mathfrak{f}_1) = 2\,\varphi(\mathfrak{f}_1)$).

Ist $x = \mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\sqrt{-3}^{s}\,\mathfrak{f}_1}\right)$, $y = \mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\sqrt{-3}^{s-1}\,\mathfrak{f}_1}\right)$, so lautet diese Gleichung für x entsprechend (17.):

$$(18.) \qquad y(x-1)^3 - 3^3(x-1) - 3^3 = 0.$$

(Ihr irreduzibler Faktor für $s = 1$ wäre $yx^2 + y(y_1 - 3)x + \frac{y}{y_1} = 0$, wo y und y_1 assoziierte Zahlen sind; wir brauchen ihn aber gar nicht zu kennen.)

Die Diskriminante dieser Gleichung ist

$$D = -\frac{3^9}{y^3}(y-4).$$

Nach A.3. ist y oder $\frac{1}{y}$ in $\mathfrak{f}_1$ enthalten (bzw. eine Einheit). $y - 4$ resp. $\frac{1}{y}(y-4)$ kann, wenn wir $\mathfrak{f}_1 \neq 2$ voraussetzen, wie man genau wie in B. 2. (11.) bis (13.) (also durch eine Rekursionsbeziehung; für $s = 1$ wird $y - 4 = T\left(\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}_1}\right)\right) = \sqrt{-3}^{3}\,I$,

wo I in $(\mathfrak{f}_1, 2)$ enthalten ist) mit geringer Modifikation (statt E ist jeweilen I zu setzen, wo I oder $\frac{1}{I}$ in $\mathfrak{f}_1$ enthalten ist) findet, außer in 3 enthaltenen Primidealen höchstens noch einen in $\mathfrak{f}_1$ aufgehenden Faktor enthalten. Ferner erkennt man für $s = 1$, daß die Diskriminante D den Faktor $\sqrt{-3}$ in ungerader Potenz enthält, (da $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}_1}\right) - 4 = \sqrt{-3}^3 I$); es wird also $\sqrt{-3}$ das Quadrat einer Zahl in $K(\sqrt{-3}\,\mathfrak{f}_1)$, d. h. der Faktor $\sqrt{-3}$ tritt schon in der Relativdiskriminante von $K(\sqrt{-3}^1\,\mathfrak{f}_1)$ auf.

Der Satz ist nun nur noch für $\mathfrak{f}_1 = 2$ zu beweisen. Da $\mathfrak{S}\left(\frac{1}{2\sqrt{-3}}\right) = -\frac{1}{2}$ (s. A. 3. (2.)), sei $s \geqq 2$. Da der Satz für den Körper $K(\sqrt{-3}^s 2^2)$ bewiesen ist, können auch in der Relativdiskriminante von $K(\sqrt{-3}^s 2)$ keine zu $2\sqrt{-3}$ primen Faktoren auftreten; daß aber 2 darin aufgeht, ist unter 1. gezeigt worden. Es bleibt somit nur noch der Nachweis zu leisten, daß $\sqrt{-3}$ Teiler der Relativdiskriminante von $K(6)$ ist.

Aus der schon oft benutzten Formel A. 3. (2.) folgt:

$$\frac{\mathfrak{S}(2 \cdot \frac{1}{6})}{\mathfrak{S}(\frac{1}{6})} = -\left(\frac{\mathfrak{S}(\frac{1}{6}) - 4}{2\,\mathfrak{S}(\frac{1}{6}) + 1}\right)^3,$$

mithin, da $\mathfrak{S}(\frac{1}{3}) = 1$, $\mathfrak{S}(\frac{1}{6})$ eine Einheit ist:

$$\mathfrak{S}(\tfrac{1}{6}) - 4 = E\,(2\,\mathfrak{S}(\tfrac{1}{6}) + 1).$$

Andererseits ist, nach (12.):

$$\frac{\mathfrak{S}\left(\frac{1}{2\sqrt{-3}}\right) - 4}{\mathfrak{S}\left(\frac{1}{6}\right) - 4} \cdot \frac{\mathfrak{S}\left(\frac{1}{6}\right)}{\mathfrak{S}\left(\frac{1}{2\sqrt{-3}}\right)} = \left(\frac{1 + 2\,\mathfrak{S}\left(\frac{1}{6}\right)}{\sqrt{-3}^3}\right)^2$$

und daher, weil $\mathfrak{S}\left(\frac{1}{2\sqrt{-3}}\right) = -\frac{1}{2}$, $\mathfrak{S}(\frac{1}{6}) = E'$:

$$(3)^5 = (\mathfrak{S}(\tfrac{1}{6}) - 4)^3, \quad \sqrt{-3} = \mathfrak{L}^3, \quad \mathfrak{L} = \left(\frac{\mathfrak{S}(\frac{1}{6}) - 4}{\sqrt{-3}^3}\right).$$

Dabei ist, da $\frac{1}{6}\varphi(6) = 3$, $\mathfrak{L}$ ein Primideal ersten Grades. (Vgl. die analoge, aber inverse (!) Form in (16.)).

Damit ist der Hauptsatz dieses Kapitels in allen Teilen erwiesen.

C. Der Relativgrad des Körpers $K(\mathfrak{f})$.

Es wird in diesem Kapitel bewiesen der

Satz: Der Relativgrad des Körpers $K(\mathfrak{f})$ in bezug auf den Körper $k(\varrho)$ ist $\frac{1}{6}\varphi(\mathfrak{f})$.

Da die Teilungsgleichung $T_{\mathfrak{f}} = 0$, deren Koeffizienten im Körper $k(\varrho)$ liegen, vom Grad $n = \frac{1}{6}\varphi(\mathfrak{f})$ ist, muß nur bewiesen werden, daß der Relativgrad des Körpers $K(\mathfrak{f})$ nicht kleiner als n sein kann. Für $\mathfrak{f} = \mathfrak{l}^u$ ist dies bereits im Kapitel B. (für $\mathfrak{l} \neq \sqrt{-3}$ unter 1.), für $\mathfrak{f} = \sqrt{-3}^u$ unter 2.) bewiesen worden. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. $\mathfrak{f} = \mathfrak{l}_1^{u_1} \cdot \mathfrak{l}_2^{u_2} \cdots \mathfrak{l}_r^{u_r} \not\equiv 0 \ (\sqrt{-3})$.

Wir setzen voraus, daß der Grad von $K(\mathfrak{f}_1)$, $(\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{l}_1^{u_1} \cdots \mathfrak{l}_{r-1}^{u_{r-1}})$, (wir bezeichnen diesen Körper kurz mit K_1), gleich $n_1 = \frac{1}{6}\varphi(\mathfrak{f}_1)$ ist. Ebenso ist der Grad (immer in bezug auf $k(\varrho)$) von $K(\mathfrak{l}_r^{u_r}) = K(\mathfrak{f}_2) = K_2$ gleich $n_2 = \frac{1}{6}\varphi(\mathfrak{f}_2)$. Der Grad von $K^* = K(K_1, K_2)$ ist, da die Diskriminanten D_1 und D_2 von K_1 und K_2 prim zu einander sind, $n^* = n_1 n_2 = \frac{1}{36}\varphi(\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_2)$ und seine Diskriminante (in bezug auf $k(\varrho)$ gleich $D^* = D_1^{n_2} D_2^{n_1}$. Der Körper $K(\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_2) = K(\mathfrak{f})$ enthält K^*. Es ist zu beweisen, daß sein Relativgrad in bezug auf K^* gleich 6 ist, (außer wenn $\mathfrak{f}_2 = 2$, wo er relativ-kubisch sein muß).

Bedeutet $\bar{D}^*$ die Relativdiskriminante von K^* in bezug auf K_2, und $n(\bar{D}^*)$ ihre in K_2 genommene Norm, so ist (*Hilbert:* Zahlbericht S. 206) $D^* = D_2^{n_1} n(\bar{D}^*)$, also $(\bar{D}^*) = (D_1)$, mithin $\bar{D}^*$ prim zu $\mathfrak{f}_2$. Das in $\mathfrak{l}_r$ aufgehende (ambige) Primideal $\mathfrak{L}_r = \left(\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{l}_r^{u_r}}\right)\right)$ des Körpers K_2 zerfällt somit in K^* in lauter voneinander verschiedene Primideale. Wir werden nun ein Ideal des Körpers $K(\mathfrak{f})$ nachweisen, dessen 6. Potenz in $\mathfrak{L}_r$ aufgeht, wodurch der Körper $K(\mathfrak{f})$ als vom mindestens 6. Grade über K^* festgestellt sein wird.

Wir können $\mathfrak{f}_1 \not\equiv 0 \ (2)$ voraussetzen, da $\mathfrak{l}_r = 2$ sein kann. Dann ist nach A. 3. (10.)

$$(1.) \qquad \frac{\mathfrak{S}(\mathfrak{f}_1 z)}{\mathfrak{S}(z)} = \varepsilon \frac{\prod_\beta{}^{6} T_\beta(\mathfrak{S})}{\prod_\beta{}^{3} T_{\beta\sqrt{-3}}(\mathfrak{S})},$$

wo β sämtliche Teiler von $\mathfrak{f}_1$ (einschließlich $\mathfrak{f}_1$) durchläuft. Setzt man nun $z = \frac{\nu}{\mathfrak{f}} = \frac{\nu}{\mathfrak{l}_r^{u_r}\mathfrak{f}_1}$, $(\nu, \mathfrak{f}) = (1)$, $\mathfrak{l}_r \neq \sqrt{-3}$, so wird die linke Seite von (1.) gleich $\frac{\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{l}_r^{u_r}}\right)}{E}$, oder, als Hauptideal, gleich $\mathfrak{L}_r$. Dabei darf hier $\mathfrak{f}_1 \equiv 0 \ (\sqrt{-3})$ sein (die Form von (1.) ändert sich dann nur unwesentlich; es bleibt die rechte Seite die 3. Potenz einer rationalen Funktion), nur nicht $\mathfrak{f}_1 = \sqrt{-3}$. Es wird somit $\mathfrak{L}_r$ eine 3. Potenz, und damit ist der Relativgrad von $K(\mathfrak{f})$ in bezug auf $k(\varrho)$ als mindestens $\frac{1}{12}\varphi(\mathfrak{f})$ erwiesen.

Es kann nun aber gezeigt werden, daß

$$\frac{\prod_\beta{}^{2} T_\beta}{\prod_\beta T_{\beta\sqrt{-3}}} = \prod_\beta \frac{T_\beta^2}{T_{\beta\sqrt{-3}}} = \prod_\beta P_\beta$$

ein Quadrat ist.

Wir betrachten nur einen Faktor P_β. Dieser Faktor sei so gewählt, daß er keine Einheit ist. Es muß hier nun auch $\mathfrak{f}_1 \not\equiv 0 \ (\sqrt{-3})$ vorausgesetzt werden.

Nach dem Hilfssatz in Kapitel B. (1.) gilt die Relation

$$T_{\beta\sqrt{-3}}(x)\, T_\beta(x) \equiv (x-1)^{3r}\, T_\beta(y), \qquad y = x\left(\frac{3}{x-1}\right)^3,$$

wenn $r = \frac{1}{6}\varphi(\beta)$ der Grad von $T_\beta(x)$ ist. Daher hat man

$$P_\beta(x) = \frac{T_\beta^3(x)}{T_{\beta\sqrt{-3}}(x)} = \frac{T_\beta^3(x)}{(x-1)^{3r}\,T_\beta(y)}.$$

Für $x = \wp\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)$ wird $x - 1 = 3E$, $y = \wp\left(\frac{\nu\sqrt{-3}}{\mathfrak{f}}\right)$ (s. B. 1. a.).

Ferner ist unter B. 1. bewiesen worden, daß

$$(2.)\quad T_\beta\left(\wp\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)\right) = \sqrt{-3}^{3r} I_\beta, \qquad T_\beta\left(\wp\left(\frac{\nu\sqrt{-3}}{\mathfrak{f}}\right)\right) = \sqrt{-3}^{3r}\bar{I}_\beta,$$

wo I_β und $\bar{I}_\beta$ in $(\beta, \mathfrak{f})$ enthalten sind. Dies führt, immer für $x = \wp\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)$, zu der Idealgleichung

$$(\bar{I}_\beta)(P_\beta) = (I_\beta)^3,$$

mithin

$$\prod_\beta (P_\beta) = \frac{\Pi(I_\beta)^3}{\Pi(\bar{I}_\beta)} = \frac{\mathfrak{L}^3}{\mathfrak{L}'},$$

während

$$\mathfrak{L}_r = \Pi^3(P_\beta).$$

Dabei entsteht $\bar{I}_\beta$ aus I_β und damit $\mathfrak{L}'$ aus $\mathfrak{L}$, indem man nach (2.) ν durch $\nu\sqrt{-3}$ ersetzt. Nun kann in $\mathfrak{L}_r$ höchstens die 6. Potenz, also in $\prod_\beta (P_\beta)$ höchstens die 2. Potenz eines Primideals aufgehen, weil sonst $K(\mathfrak{f})$ von höherem als 6. Grad über K^* wäre. Wenn also $\mathfrak{L}$ durch $\mathfrak{P}^e$, $\mathfrak{L}'$ durch $\mathfrak{P}^{e'}$ teilbar ist, so ist $3e - e' \leqq 2$, d. h. $e' \geqq e$, $\underline{\mathfrak{L}' \equiv 0\ (\mathfrak{L})}$. Ersetzt man ν durch $\nu\sqrt{-3}^h$, $(h = 1, 2, \ldots, s-1$; $\sqrt{-3}^s \equiv \varepsilon\ (\mathfrak{f}))$, wodurch $\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{L}^{(h)}$ übergehe, so ist entsprechend:

$$\mathfrak{L}'' \equiv 0\ (\mathfrak{L}'), \cdots, \mathfrak{L}^{(s)} = \mathfrak{L} \equiv 0\ (\mathfrak{L}^{(s-1)}) \equiv 0\ (\mathfrak{L}^{(s-2)}) \cdots \equiv 0\ (\mathfrak{L}'),$$

mithin $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$ und es ist $\mathfrak{L}_r = \mathfrak{L}^6$ in $K(\mathfrak{f})$.

Für $\mathfrak{f}_r^{u_r} = \mathfrak{f}_2 \neq 2$ ergibt sich, da $\mathfrak{L}_r$ in $K(\mathfrak{f}_2)$ ein Primideal ist, nach dem zu Anfang dieses Beweises ausgeführten, daß der Grad von $K(\mathfrak{f})$ relativ zu K^* gleich 6, also relativ zu $k(\varrho)$ gleich $\frac{1}{6}\varphi(\mathfrak{f})$ ist. Ist dagegen $\mathfrak{f}_2 = 2$, so wird $\mathfrak{L}_r = (4)$. Es ist aber in diesem Fall nur zu beweisen, daß (2) in $K(\mathfrak{f})$ eine 3. Potenz wird, da der Grad von $K(2)$ gleich $1 = 2 \cdot \frac{1}{6}\varphi(2)$ ist. Dies ist aber durch das vorige erwiesen.

Damit ist für $\mathfrak{f} \not\equiv 0\ (\sqrt{-3})$ der Relativgrad des Körpers $K(\mathfrak{f})$ allgemein als $\frac{1}{6}\varphi(\mathfrak{f})$ festgestellt.

2. $\underline{\mathfrak{f} = \sqrt{-3}^u \mathfrak{f}_1}$, $\mathfrak{f}_1 \not\equiv 0\ (\sqrt{-3})$.

Da der Grad von $K(\sqrt{-3})$ gleich $1 = 3 \cdot \frac{1}{6}\varphi(\sqrt{-3})$ ist, muß gezeigt werden, daß $K(\sqrt{-3}\,\mathfrak{f}_1)$ relativ-quadratisch zu $K(\mathfrak{f}_1)$ ist. Dies folgt aber aus dem Zerfall von $\sqrt{-3} = I^2$ (wir benutzten diese Tatsache früher in B. 3., um zu beweisen, daß $\sqrt{-3}$ in der Relativdiskriminante von $K(\sqrt{-3}\,\mathfrak{f}_1)$ enthalten ist). Nun müßte der Körper $K(\sqrt{-3}^r \mathfrak{f}_1)$ mit $K(\sqrt{-3}^{r-1} \mathfrak{f}_1)$ identisch sein, wenn er nicht vom Relativgrad 3 in bezug auf ihn wäre, da die Wurzeln der kubischen Gleichung, der die Zahl $\wp\left(\frac{\nu}{\sqrt{-3}^r \mathfrak{f}_1}\right)$ in $K(\sqrt{-3}^{r-1} \mathfrak{f}_1)$ genügt — (es ist dies die

Gleichung B. (18.)) —, rational durch irgend eine von ihnen ausgedrückt werden können. Wenn also der Grad von $K(\mathfrak{f})$ nicht $\frac{1}{6}\varphi(\mathfrak{f})$ ist, müßte er von der Form $\frac{1}{3^\sigma}\cdot\frac{1}{6}\varphi(\mathfrak{f})$ sein. Unter 1.) wurde aber gezeigt, daß er, auch wenn $\mathfrak{f}\equiv 0\,(\sqrt{-3})$, mindestens $\frac{1}{12}\varphi(\mathfrak{f})$ ist. Mithin ist er notwendig $\frac{1}{6}\varphi(\mathfrak{f})$ und damit der Satz allgemein bewiesen.

Der Körper $K(\mathfrak{f})$ ist relativ-zyklisch zu K^*.

II. Teil.

Die Berechnung der Teilungskörper.

Die Aufstellung der Multiplikationsformel gelingt am einfachsten mit Hilfe des Additionstheorems, (sie ist auch möglich durch Reihenentwicklung), und zwar geht man mit Vorteil auf die $\wp$-Funktion zurück. Man kann dann die Rekursionsformeln für einen rationalen Führer (*Weber*, Alg. III, S. 200) für die Funktionen P_n benutzen, deren Nullstellen die Zahlen $\wp\left(\frac{v}{n}\right)$ sind [1]).

Ist die Multiplikationsformel für den Führer $\mathfrak{f}=x\varrho+y$ zu bilden, so zerlegt man etwa $\mathfrak{f}=\mathfrak{f}_1+\mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{f}_1=x\varrho$, $\mathfrak{f}_2=y$. (Gelegentlich sind auch andere Zerlegungen vorteilhafter; s. z. B. die Ableitung von Formel A. 3. (4.)). Aus

$$\frac{\wp(xz)}{\wp(y)}=R_1\left(\frac{\wp^3}{g_3}\right),$$
$$\frac{\wp(yz)}{\wp(y)}=R_2\left(\frac{\wp^3}{g_3}\right),$$

(wo sich die Funktionen R_1, R_2 leicht aus *Weber*, Alg. III § 58, Formeln (10.)—(13.), (15.), (16.) ergeben und die Koeffizienten rationale Zahlen sind), ergibt sich:

$$\frac{\wp(\mathfrak{f}_1 z)}{\wp(z)}=\varrho\,R_1\left(\frac{1}{\mathfrak{S}}\right),$$
$$\frac{\wp(\mathfrak{f}_2 z)}{\wp(z)}=\quad R_2\left(\frac{1}{\mathfrak{S}}\right),$$
$$\frac{\wp(\mathfrak{f}_1 z)+\wp(\mathfrak{f}_2 z)+\wp(\mathfrak{f} z)}{\wp(z)}=\frac{\wp(\mathfrak{f} z)}{\wp(z)}+\varrho\,R_1\left(\frac{1}{\mathfrak{S}}\right)+R_2\left(\frac{1}{\mathfrak{S}}\right)=-\frac{\mathfrak{S}-4}{4\,\mathfrak{S}^2}\,\frac{\psi^2(\mathfrak{S})}{\Phi^2(\mathfrak{S})},$$

(1.)
$$\frac{\wp(\mathfrak{f} z)}{\wp(z)}=R(\mathfrak{S}),\qquad \frac{\mathfrak{S}(\mathfrak{f} z)}{\mathfrak{S}(z)}=\frac{1}{R^3(\mathfrak{S})}.$$

Dabei ist

$$\Phi(\mathfrak{S})=\varrho\,R_1\left(\frac{1}{\mathfrak{S}}\right)-R_2\left(\frac{1}{\mathfrak{S}}\right),$$

$$\psi(\mathfrak{S})=\frac{\varrho}{\mathfrak{f}_1}\left(\mathfrak{S}\,R_1\left(\frac{1}{\mathfrak{S}}\right)+3\,R_1'\left(\frac{1}{\mathfrak{S}}\right)\right)-\frac{1}{\mathfrak{f}_2}\left(\mathfrak{S}\,R_2\left(\frac{1}{\mathfrak{S}}\right)+3\,R_2'\left(\frac{1}{\mathfrak{S}}\right)\right).$$

(Die Ableitung bezieht sich auf das Argument $\frac{1}{\mathfrak{S}}=\frac{\wp^3}{g_3}$).

---

[1]) Diese Rekursionsformeln sind für den vorliegenden Fall: $g_2=0$, $\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}=\varrho\right)$ für die komplexe Multiplikation ausgedehnt worden von Takenouchi. [Journ. of the Coll. of Science, Tokyo, Bd. XXXVII Art 5.]

Kommt es nur auf die Ermittlung der Teilungsgleichung an, so ist folgendes zu beachten:

Die Zahlen $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}}\right)$ sind nach (1.) Pole von $R(\mathfrak{S})$, aber nicht solche von R_1 und R_2, (da diese Funktionen die Zahlen $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}_1}\right)$, $\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{f}_2}\right)$ liefern). Die Teilungsgleichung ist also ganz in $\Phi(\mathfrak{S}) = 0$ enthalten. Der Zähler $G_1(\mathfrak{S})$ von $\Phi = \frac{G_1}{G_2}$ enthält aber noch die Funktion $\Phi_{\mathfrak{f}'}(\mathfrak{S}) = T_{\mathfrak{f}'} \prod_i T_{a_i}$, wo $\mathfrak{f}' = \mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_2 = x\varrho - y$ ist und die α_i die Teiler von $\mathfrak{f}'$ sind. Denn die Funktionen $\wp(\mathfrak{f}_1 z)$ und $\wp(\mathfrak{f}_2 z)$ ändern sich nicht, wenn man $\mathfrak{f}_1$ (oder $\mathfrak{f}_2$) durch $-\mathfrak{f}_1$ (bezw. $-\mathfrak{f}_2$) ersetzt. Man kann aber die Zerlegung $\varepsilon\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2$ immer von vornherein so wählen, daß $\Phi_{\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_2}$ bekannt ist oder auf einfachem Wege berechnet werden kann.

Die Teilungsgleichung für den konjugierten Führer $\bar{\mathfrak{f}} = x\varrho^2 + y$ erhält man, indem man in den Koeffizienten von $T_{\mathfrak{f}}\ \varrho$ durch ϱ^2 ersetzt.

Die wichtigsten Formeln, die auch im theoretischen Teil öfters zur Anwendung gelangt sind, sind folgende:

$$\frac{\mathfrak{S}(\sqrt{-3}\,z)}{\mathfrak{S}(z)} = \left(\frac{3}{\mathfrak{S}-1}\right)^3, \qquad \frac{\mathfrak{S}(2z)}{\mathfrak{S}(z)} = -\left(\frac{\mathfrak{S}-4}{2\mathfrak{S}+1}\right)^3,$$

$$\frac{\wp'(\sqrt{-3}\,z)}{\wp'(z)} = \frac{2\mathfrak{S}+1}{\sqrt{-3}^3}.$$

Die folgende Tabelle gibt eine Anzahl numerisch durch die Gleichungen $T_{\mathfrak{f}} = 0$ bestimmter Teilungskörper $K(\mathfrak{f})$.

Beispiele von Teilungsgleichungen.

$\mathfrak{f}$	$n(\mathfrak{f})$	$T_{\mathfrak{f}}$
$2\varrho + 1$	3	$1 \quad \left[\mathfrak{S}\left(\frac{1}{\sqrt{-3}}\right) = \infty\right]$
2	4	$\mathfrak{S} - 4 = 0$
$3\varrho + 1$	7	$\mathfrak{S} - (3\varrho + 1) = 0$
$3 = -(2\varrho + 1)^2$	9	$\mathfrak{S} - 1 = 0$
$2(2\varrho + 1)$	12	$2\mathfrak{S} + 1 = 0$
$3\varrho - 1$	13	$\mathfrak{S}^2 + (3\varrho - 1)(3\varrho + 2)\mathfrak{S} - (3\varrho - 1) = 0$
$4 = 2^2$	16	$\mathfrak{S}^2 + 10\mathfrak{S} - 2 = 0$
$3\varrho - 2$	19	$\mathfrak{S}^3 - 3\varrho(3\varrho - 2)\mathfrak{S}^2 + 3(3\varrho - 2)(2\varrho - 1)\mathfrak{S} - (3\varrho - 2) = 0$
$(2\varrho + 1)(3\varrho + 1)$	21	$(3\varrho + 1)\mathfrak{S}^2 + (3\varrho + 1)(3\varrho - 2)\mathfrak{S} + 1 = 0$
5	25	$\mathfrak{S}^4 - 25\mathfrak{S}^3 + 15\mathfrak{S}^2 + 95\mathfrak{S} - 5 = 0$
$(2\varrho + 1)^3$	27	$\mathfrak{S}^3 - 3\mathfrak{S}^2 - 24\mathfrak{S} - 1 = 0$
$6\varrho + 5$	31	$\mathfrak{S}^5 - (6\varrho + 5)(3\varrho - 2)\mathfrak{S}^4 + (6\varrho + 5)(18\varrho - 19)\mathfrak{S}^3 - 7(6\varrho + 5)(3\varrho - 1)\mathfrak{S}^2 - (6\varrho + 5)(33\varrho + 38)\mathfrak{S} + (6\varrho + 5) = 0$

$\mathfrak{f}$	$n(\mathfrak{f})$	$T_{\mathfrak{f}}$
$6 = -2(2\varrho+1)^2$	36	$\mathfrak{S}^3 - 3\mathfrak{S}^2 + 57\mathfrak{S} - 1 = 0$
$3\varrho - 4$	37	$\mathfrak{S}^6 + 6\varrho(3\varrho-4)\mathfrak{S}^5 - 3(3\varrho-4)(16\varrho+7)\mathfrak{S}^4$ $+ (3\varrho-4)(111\varrho+44)\mathfrak{S}^3$ $+ 6(3\varrho-4)(17\varrho+21)\mathfrak{S}^2$ $- 3\varrho(3\varrho-4)(11\varrho+23)\mathfrak{S} - (3\varrho-4) = 0$
$(2\varrho+1)(3\varrho-1)$	39	$(3\varrho-1)\mathfrak{S}^4 + (3\varrho-1)(6\varrho+5)\mathfrak{S}^3$ $- 3(3\varrho-1)(6\varrho+7)\mathfrak{S}^2$ $+ 2(3\varrho-1)(9\varrho-2)\mathfrak{S} - 1 = 0$
$4\varrho + 9$	43	$\mathfrak{S}^7 - (4\varrho+9)(51\varrho+2)\mathfrak{S}^6 - 3(4\varrho+9)(3\varrho-4)\mathfrak{S}^5$ $- 2(4\varrho+9)(84\varrho+79)\mathfrak{S}^4$ $+ 4(4\varrho+9)(474\varrho-255)\mathfrak{S}^3$ $- 3(4\varrho+9)(69\varrho+49)\mathfrak{S}^2$ $- 2(4\varrho+9)(39\varrho-14)\mathfrak{S} - (4\varrho+9) = 0$
$7 = (3\varrho+1)(3\varrho^2+1)$	49	$\mathfrak{S}^6 + 48\mathfrak{S}^5 - 741\mathfrak{S}^4 + 1924\mathfrak{S}^3 - 363\mathfrak{S}^2 - 141\mathfrak{S}$ $+ 1 = 0$
$(3\varrho+1)^2$	49	$\mathfrak{S}^7 + (3\varrho+1)(18\varrho-7)\mathfrak{S}^6 + (3\varrho+1)^2(27\varrho-60)\mathfrak{S}^5$ $- (3\varrho+1)^3(81\varrho+197)\mathfrak{S}^4$ $- 4(3\varrho+1)^3(3\varrho-56)\mathfrak{S}^3$ $+ (3\varrho+1)^2(27\varrho-183)\mathfrak{S}^2$ $+ (3\varrho+1)^2(30\varrho+61)\mathfrak{S} - (3\varrho+1) = 0$
$9\varrho + 5$	61	$\mathfrak{S}^{10} + 10(9\varrho+5)\mathfrak{S}^9 - 9(9\varrho+5)(9\varrho+17)\mathfrak{S}^8$ $+ 3(9\varrho+5)(144\varrho+307)\mathfrak{S}^7$ $+ 3(9\varrho+5)(486\varrho-43)\mathfrak{S}^6$ $- 9(9\varrho+5)(1197\varrho+722)\mathfrak{S}^5$ $+ 3(9\varrho+5)(4203\varrho+1112)\mathfrak{S}^4$ $- 15(9\varrho+5)(729\varrho+127)\mathfrak{S}^3$ $- 9(9\varrho+5)(171\varrho-82)\mathfrak{S}^2$ $+ (9\varrho+5)(117\varrho-191)\mathfrak{S} - (9\varrho+5) = 0$
$8 = 2^3$	64	$\mathfrak{S}^8 - 104\mathfrak{S}^7 + 952\mathfrak{S}^6 - 4124\mathfrak{S}^5 + 3430\mathfrak{S}^4 - 1544\mathfrak{S}^3$ $+ 7336\mathfrak{S}^2 + 616\mathfrak{S} - 2 = 0$
$9\varrho + 7$	67	$\mathfrak{S}^{11} + (9\varrho+7)(9\varrho-5)\mathfrak{S}^{10} - (9\varrho+7)(81\varrho+53)\mathfrak{S}^9$ $+ 6(9\varrho+7)(99\varrho+196)\mathfrak{S}^8$ $- 3(9\varrho+7)(2142\varrho+2767)\mathfrak{S}^7$ $+ 3(9\varrho+7)(6129\varrho+7613)\mathfrak{S}^6$ $- 3(9\varrho+7)(2520\varrho+6089)\mathfrak{S}^5$ $- 3(9\varrho+7)(423\varrho+7457)\mathfrak{S}^4$ $+ 6(9\varrho+7)(3024\varrho+5315)\mathfrak{S}^3$ $+ (9\varrho+7)(1602\varrho-1921)\mathfrak{S}^2$ $+ 2(9\varrho+7)(198\varrho+151)\mathfrak{S} - (9\varrho+7) = 0$
$9 = (2\varrho+1)^4$	81	$\mathfrak{S}^9 - 9\mathfrak{S}^8 + 9\cdot 76\mathfrak{S}^7 - 3\cdot 1324\mathfrak{S}^6 + 9\cdot 1337\mathfrak{S}^5$ $- 9\cdot 2183\mathfrak{S}^4 - 3\cdot 1106\mathfrak{S}^3 - 9\cdot 679\mathfrak{S}^2 + 9\cdot 73\mathfrak{S}$ $- 1 = 0$

Hinreichende Bedingungen des Extremums bei einer neuen Art von isoperimetrischen Problemen.

Von Fräulein *Gertrud Weyl* in Breslau.

In der Bezeichnung von *Knesers* „Lehrbuch der Variationsrechnung" fordert die isoperimetrische Aufgabe die Bestimmung derjenigen ebenen Kurve zwischen zwei festen oder irgendwie vorgeschriebenen Endpunkten (0 und 1), die einem Integral

$$(1.) \qquad I = \int F(x, y;\ x', y')\, dt$$

einen extremen, einem Integral

$$(2.) \qquad K = \int G(x, y;\ x', y')\, dt$$

einen vorgeschriebenen Wert erteilt.

Ersetzt man die zweite Forderung durch die Differentialgleichung

$$(3.) \qquad -z' + G(x, y;\ x', y') = 0$$

mit der Bedingung, daß z in den Punkten 0 und 1 die für K vorgeschriebenen Werte annehmen soll, so kann man die neue Variable z als dritte räumliche Koordinate betrachten und die Aufgabe als räumliches Problem mit einer Bedingungsdifferentialgleichung in folgender Weise aussprechen: Unter allen Kurven im x, y, z-Raume, die der Differentialgleichung:

$$(3.) \qquad -z' + G(x, y;\ x', y') = 0$$

genügen und zwischen den irgendwie vorgeschriebenen Punkten 0 und 1 verlaufen, ist diejenige zu bestimmen, für die das Integral I (1.) möglichst groß bzw. möglichst klein wird.

Indem wir I statt durch (1.) durch die erweiterte Gleichung

$$(4.) \qquad I = \int \Phi(x, y, z;\ x', y', z')\, dt;\ \Phi = F + \lambda(-z' + G)$$

definieren, ist die Aufgabe auf ein Problem des freien Extremums zurückgeführt. Die gesuchten Kurven, die Extremalen, genügen den Differentialgleichungen

$$(5.) \qquad \Phi_x - \Phi'_{x'} = 0,\ \Phi_y - \Phi'_{y'} = 0,\ \Phi_z - \Phi'_{z'} = 0,$$

von denen die letzte das Integral

$$(6.) \qquad \lambda = \text{const.}$$

liefert.

Bei Variation längs der Extremalen ergibt sich:

$$(7.) \qquad \delta I = \Phi_{x'}\, \delta x + \Phi_{y'}\, \delta y + \Phi_{z'}\, \delta z \Big|_0^1.$$

Treffen wir über die Endpunkte die Verfügung: Punkt 1 sei fest vorgeschrieben, 0 aber in einer vorgelegten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ frei wählbar, so folgt aus der

Extremumsbedingung $\delta I = 0$, daß bei Fortgang in der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ die Gleichung

$$\Phi_{x'}\,\delta x + \Phi_{y'}\,\delta y + \Phi_{z'}\,\delta z = 0, \tag{8.}$$

die Transversalitätsbedingung, gilt. Die Gesamtheit aller Extremalen, welche dieser Bedingung gemäß von der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ ausgehen, bildet ein Feld, in welchem sich die *Weierstraß*sche Theorie der hinreichenden Bedingungen des Extremums entfaltet. Schneiden sich benachbarte Extremalen des Feldes, so daß eine Hülle (h) entsteht, so hört im Berührungspunkte der Extremale mit der Hülle die Extremumseigenschaft auf. Sind 1 und $1'$ die Berührungspunkte zweier Extremalen 01 und $0'1'$ mit der Kurve (h), so hat I denselben Wert für den Extremalenbogen 01 und für die aus dem Extremalenstück $0'1'$ und dem Bogen $1'1$ der Hülle zusammengesetzte Kurve. Die Punkte $1, 1' \ldots$ sind also konjugierte bzw. Brennpunkte der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$.

In den bisher behandelten Fällen ist $\mathfrak{M}$ entweder ein Punkt oder eine Kurve in der x, y-Ebene, da das isoperimetrische Integral in den meisten Fällen vom Anfangspunkte (0) aus gemessen wird und dort den Wert Null hat. In diesen Fällen treten bei der Deutung des Problems im Raume konische und keilförmige Felder auf. Ein Feld der letzteren Art erscheint auch bei denjenigen Problemen, bei denen der Anfangswert von z von der Lage des auf einer Kurve beweglichen Punktes 0 abhängt. Nur liegt dann die Schneide nicht in der x, y-Ebene. Ein keilförmiges Feld dieser Art erscheint, wenn man die von *Steiner* aufgestellten Sätze „Über Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene ...“ (Gesammelte Werke, Bd. II) unter Zuhilfenahme der Variationsrechnung beweist, z. B. wenn es sich darum handelt, diejenige ebene Figur von gegebenem Umfang und größtmöglichem Inhalt zu bestimmen, deren Begrenzung sich aus einem geradlinigen Stück und einer nicht vorgeschriebenen Linie zusammensetzt.

Aber nicht bei allen von *Steiner* gestellten Aufgaben kommt man mit konischen oder keilförmigen Feldern aus. Es gibt Probleme, bei denen einer der Endpunkte (0) frei wählbar ist, während die Kurvenlänge konstant oder von der Lage des freien Endpunktes abhängig ist. Für beliebige andere Probleme der Variationsrechnung läßt sich eine derartige Vorschrift in folgender Weise aussprechen: Der Endpunkt 0 mit den Koordinaten x_0, y_0 sei in der Ebene frei wählbar; der Wert z_0 der Funktion z in diesem Punkte sei von der Lage des Punktes abhängig: $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$. Für die Untersuchung der Extremumseigenschaft bei einem derartigen Problem braucht man ein räumliches Feld, dessen Kurven transversal (gemäß Gl. 8.) zu einer Fläche $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$ stehen. In diesem Falle wollen wir von einem *Felde mit Bodenfläche* sprechen.

Durch die räumliche Deutung des isoperimetrischen Problems haben wir eine neue Art von Aufgaben der Variationsrechnung zugänglich gemacht. Zugleich ergibt sich eine erweiterte Anwendung der *Cauchy*schen Integrationsmethode [1]), wenn wir berücksichtigen, daß zu jeder Aufgabe der Variationsrechnung eine partielle Differentialgleichung gehört, deren Integral ein Feld darstellt. Sie entsteht

---

[1]) Ostwalds Klassiker Nr. 113; Exercices d'Analyse et de Physique mathématiques p. 238—272.

im vorliegenden Falle durch Elimination der Größen y'/x' und λ aus den Gleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x'};\ \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y'};\ \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z'}$$

und hat die Form

$$\psi\left(x, y, z;\ \frac{\partial W}{\partial x},\ \frac{\partial W}{\partial y},\ \frac{\partial W}{\partial z}\right) = 0. \tag{9.}$$

Die *Cauchy*sche Methode baut die Lösung aus Charakteristiken auf, die durch einen festen Punkt oder eine feste Kurve gehen, ähnlich wie sich das konische und das keilförmige Feld aus den Extremalen zusammensetzen. Durch die dritte Gattung von Feldern gewinnen wir eine andere Methode zur Konstruktion der Lösungen: wir wählen alle Charakteristiken, die von einer Fläche ausgehen und in diesen Punkten der Beziehung (8.) genügen.

Behandelte Aufgaben.

Im folgenden sind Aufgaben der neuen Art behandelt; das Feld mit Bodenfläche wird konstruiert und seine Brennpunkte und die Hüllen der Feldkurven werden bestimmt.

Die Aufgaben sind durch geeignete Abänderungen der Anfangsbedingungen I. aus dem Problem der Königin Dido und II. aus der Aufgabe über die Kettenlinie abgeleitet, und zwar ist zu setzen:

I. a) $I = \frac{1}{2}\int (xy' - yx')\,dt$; b) $I = \int y \cdot x'\,dt$;

in beiden Fällen: $G(x, y;\ x', y') = \sqrt{x'^2 + y'^2}$;

II. $I = \int y \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$; $G(x, y; x', y') = \sqrt{x'^2 + y'^2}$.

Es handelt sich um folgende Probleme:

I. In der x, y-Ebene zwischen einem festen Punkte 1 und einem zunächst beweglichen 0 [mit den Koordinaten x_0, y_0] diejenige Kurve zu ziehen, die zusammen mit vorgeschriebenen Begrenzungen ein möglichst großes Gebiet umspannt, während ihre Länge entweder konstant oder mit der Wahl des Punktes (x_0, y_0) in folgender Weise bestimmt ist: von der gegebenen Länge l des Fadens wird ein Stück $\varphi(x_0, y_0)$ abgeschnitten, so daß nur ein Faden von der Länge $l - \varphi(x_0, y_0)$ verwendet werden kann. Hierbei ist $\varphi(x_0, y_0)$ eine gegebene Funktion zweier Veränderlicher.

a) Im Falle a) sind die Verbindungslinien der Punkte 0 und 1 mit einem festen Punkte (dem Koordinatenursprung) als Begrenzungen zu wählen.

b) Im zweiten Falle bedeutet I den Inhalt der von der Kurve, einer gegebenen Geraden (der x-Achse) und den Loten aus den Endpunkten 0 und 1 auf die Gerade begrenzten Fläche.

II. In einer vertikalen Ebene ist ein Faden von der Länge l im Punkte 1 befestigt. Durch die Wahl des zweiten Aufhängepunktes 0 wird die Länge $\varphi(x_0, y_0)$ eines Stückes festgelegt, welches zur Befestigung des Fadens im Punkte 0 verwandt wird, so daß nur ein Fadenstück von der Länge $l - \varphi(x_0, y_0)$ der Schwerkraft unterliegt. Es soll die Lage des zweiten Aufhängepunktes und die Gestalt des Fadenstückes bestimmt werden, für welche der Schwerpunkt möglichst tief liegt.

Wenn man die Aufgaben im Raume deutet, so sind diejenigen Kurven zwischen einem festen Punkte $(x_1, y_1, z_1 = l)$ und einer Fläche $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$ zu bestimmen, die in ihrem ganzen Verlaufe der Differentialgleichung $z' - \sqrt{x'^2 + y'^2} = 0$ genügen und dem Integral I einen Extremwert erteilen.

Dann müssen in den Punkten 0 die Gleichung (8.) und die Beziehung

$$\delta z_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\delta x_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_0}\delta y_0$$

erfüllt sein, aus denen die Proportion

$$\Phi_{x'} : \Phi_{y'} : \Phi_{z'} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial z}\Big|^0 \tag{10.}$$

folgt.

I. Das Problem der Königin Dido.

Aufgaben a): $I = \frac{1}{2}\int (xy' - yx')\,dt$; $G = \sqrt{x'^2 + y'^2}$.

Mithin ist zu setzen

$$\Phi = \tfrac{1}{2}(xy' - yx') + \lambda(\sqrt{x'^2 + y'^2} - z'), \tag{11.}$$

es ergeben sich aus (5.) und (11.) die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}y' - \frac{d}{dt}\left(-\tfrac{1}{2}y + \lambda\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right) &= 0, \\ -\tfrac{1}{2}x' - \frac{d}{dt}\left(+\tfrac{1}{2}x + \lambda\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right) &= 0, \end{aligned} \tag{12.}$$

welche für die Extremalen die Gleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \lambda^2 \tag{13.}$$

eines Kreises mit dem Radius $|\lambda|$ liefern; a und b sind Integrationskonstante.

Aus der *Weierstraß*schen Bedingung für das Maximum ($\mathfrak{E} < 0$) folgt, daß λ negativ sein muß.

Wir führen den Zentriwinkel des Kreises (13.) als Kurvenparameter t ein und beginnen die Messung im Punkte 0 des Extremalenbogens. Mit $t = -\frac{s}{\lambda}$ liefern die Differentialgleichungen die Integrale

$$\begin{aligned} x &= a + (x_0 - a)\cos t - (y_0 - b)\sin t, \\ y &= b + (x_0 - a)\sin t + (y_0 - b)\cos t. \end{aligned} \tag{14.}$$

Aus der Differentialgleichung für z

$$z' - \sqrt{x'^2 + y'^2} = 0$$

folgt bei Beachtung der Bedingung

$$z(0) = z_0 = \varphi(x_0, y_0)$$

die Gleichung

$$z = \varphi(x_0, y_0) - \lambda t. \tag{15.}$$

Das Feld mit der Bodenfläche $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$ besteht aus denjenigen Extremalen im Raume [(14.), (15.)], die transversal zu dieser Fläche stehen, für die also die folgende Doppelgleichung, die sich aus der Transversalitätsbedingung (10.) ergibt, gilt:

$$\left(-\frac{1}{2}y - \frac{dx}{dt}\right) : \left(\frac{1}{2}x - \frac{dy}{dt}\right) : \lambda = \frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} : 1\Big|^0.$$

Aus diesen Beziehungen und der Gleichung $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = \lambda^2$ folgt für λ die quadratische Gleichung

$$(16.)\quad \lambda^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}\right)^2 - 1\right] + \lambda \left[y_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y_0}\right] - \frac{1}{4}(x_0^2 + y_0^2) = 0$$

mit den Wurzeln

$$(17.)\quad \lambda = \frac{x_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} - y_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \pm \sqrt{(x_0^2 + y_0^2) - \left(x_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} + y_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y_0}\right)^2}}{2\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}\right)^2 - 1\right]}.$$

Die Bestimmung der Konstanten λ, a, b und der Extremalen ist nur möglich, wenn die Ungleichung

$$(x_0^2 + y_0^2) - \left(x_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} + y_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y_0}\right)^2 \geqq 0$$

erfüllt ist. Indem wir die Proportion

$$\cos(n, x) : \cos(n, y) : \cos(n, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} : -1$$

beachten, in welcher durch (n, x), (n, y), (n, z) die Winkel zwischen der Flächennormale und den Achsen bezeichnet werden, entnehmen wir aus dieser Ungleichung: von einem Punkte (x_0, y_0, z_0) der Bodenfläche geht nur dann eine Extremale aus, wenn der spitze Winkel, den die Normale mit der z-Achse bildet, kleiner ist als der spitze Winkel zwischen der Normale und der vom Punkte (x_0, y_0) auf die z-Achse gefällten Senkrechten.

Aus der Gleichung für λ (16.) erschließen wir, daß nur in solchen Punkten (x_0, y_0, z_0) der Bodenfläche λ einen negativen Wert annimmt, in denen entweder $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}\right)^2 < 1$ oder $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}\right)^2 > 1$ und $x_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} - y_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} < 0$ ist. Nur von diesen Punkten gehen Extremalen aus, die ein Maximum von I liefern.

Daß λ verschwindet, ist nur in den Punkten $(x_0 = y_0 = 0)$ der z-Achse möglich; von diesen geht sicher keine Kurve des räumlichen Feldes aus.

Wie man aus der Gestalt der Gleichung für λ ersieht, ist diese besonders einfach für Rotationsflächen um die z-Achse und Ebenen als Bodenflächen. Diese beiden Fälle sind daher im folgenden eingehend behandelt.

1. *Die Rotationsflächen um die z-Achse.*

Wählt man eine solche Fläche

$$z_0 = \varphi\left(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\right)$$

als Bodenfläche des Feldes, so ergibt sich für λ die Gleichung:

$$\lambda = \frac{r_0 \varepsilon}{\sqrt{1 - \varphi'^2}},$$

wobei $\varepsilon = \pm 1$, $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ gesetzt ist. Führen wir die abkürzende Bezeichnung

$$g = g(r_0) = \frac{\varepsilon \varphi'(r_0)}{\sqrt{1 - \varphi'(r_0)^2}}$$

ein, dann lauten die Gleichungen der Extremalen nach (14.) und (15.):

$$x = \tfrac{1}{2}\,[x_0 + g y_0 + (x_0 - g y_0)\cos t - (y_0 + g x_0)\sin t],$$
$$y = \tfrac{1}{2}\,[y_0 - g x_0 + (x_0 - g y_0)\sin t + (y_0 + g x_0)\cos t], \tag{18.}$$
$$z = \varphi(r_0) - \frac{r_0\,\varepsilon}{\sqrt{1-\varphi'(r_0)^2}}\,t.$$

Damit eine Kurve dieser Schar in ihrem ganzen Verlaufe die Extremumseigenschaft besitzt, darf sie keine benachbarte Kurve des Feldes schneiden. Es muß also längs des Extremalenbogens die *Jacobi*sche Determinante $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,x_0,y_0)} = \Delta(t,x_0,y_0)$ von Null verschieden sein. Um dies zu prüfen, bestimmen wir die Brennpunkte, d. h. die Punkte, in denen diese Determinante verschwindet. Indem man

$$g = \frac{\varepsilon\,\varphi'(r_0)}{\sqrt{1-\varphi'(r_0)^2}} = \operatorname{ctg}\frac{\tau}{2} \tag{19.}$$

und φ', φ'' für $\varphi'(r_0), \varphi''(r_0)$ setzt, geht die Bedingung $\Delta = 0$ über in die Gleichung:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{1}{\sin\dfrac{\tau}{2}}\left[\sin\left(\dfrac{t-\tau}{2}\right) + r_0\,\dfrac{\varphi''\,\varepsilon}{2\,(1-\varphi'^2)^{3/2}}\left(\cos\dfrac{t-\tau}{2} - \cos\dfrac{t+\tau}{2}\right)\right] \\ + \left[\cos\dfrac{\tau}{2} - \dfrac{1}{2}\,\varepsilon t\left(\dfrac{\varphi''\cdot\varphi'\cdot r_0}{(1-\varphi'^2)^{3/2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-\varphi'^2}}\right)\right]\cos\dfrac{t-\tau}{2} \end{Bmatrix} \sin\frac{t-\tau}{2} = 0. \tag{20.}$$

Der Wert $t = \tau$ ist eine Nullstelle dieser Gleichung. Ihm entspricht der Punkt $x = 0,\ y = 0,\ z = \varphi(r_0) - \frac{r_0\,\varepsilon}{2\sqrt{1-\varphi'^2}}\cdot\tau$ der räumlichen Extremalen. Somit liegen die zum Werte $t = \tau$ gehörigen Brennpunkte auf der z-Achse.

Wenn die Bedingung (20.) auch von einer andern Funktion $t = T(r_0)$ erfüllt ist, so ist der Ort der zugehörigen Brennpunkte eine Rotationsfläche um die z-Achse, wie man durch Einsetzen der Größe $t = T(r_0)$ in die Gleichungen (18.) und Elimination von r_0 und ϑ_0 aus den so entstandenen Beziehungen erkennt. Es ergibt sich für die Brennfläche:

$$x^2 + y^2 = \frac{r_0^2}{1-\varphi'^2}\sin^2\frac{T(r_0) - \tau(r_0)}{2},$$
$$z = \varphi(r_0) - \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon r_0}{\sqrt{1-\varphi'^2}}\,T(r_0)$$

und hieraus $z = \psi(\sqrt{x^2+y^2})$.

2. Wählt man als Bodenfläche einen *Rotationskegel um die z-Achse*

$$z = Cr,$$

so ist $\varphi(r_0) = Cr_0;\ \varphi' = C,\ \varphi'' = 0,\ g = \operatorname{ctg}\frac{\tau}{2} = \frac{\varepsilon C}{\sqrt{1-C^2}}$ zu setzen und die Bedingung (20.) vereinfacht sich folgendermaßen:

$$\sin\frac{t-\tau}{2}\left\{\frac{\sin\dfrac{t-\tau}{2}}{\sin\dfrac{\tau}{2}} + \left(\cos\frac{\tau}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{t}{\sin\dfrac{\tau}{2}}\right)\cos\frac{t-\tau}{2}\right\} = 0. \tag{21.}$$

Die Werte $t = T$ der Brennpunktsparameter hängen nur von der Konstante C ab; sie sind mithin dieselben für alle Feldkurven. Die zum Parameterwert $t = \tau$ ge-

hörigen Hüllkurven entarten in die Punkte der z-Achse, welche eine degenerierte Schale der Brennfläche ist. Wenn die Gleichung (21.) von τ verschiedene Lösungen hat, so gehört zur Brennfläche noch ein Rotationskegel um die z-Achse, der mit der Bodenfläche die Spitze gemeinsam hat und innerhalb dieses Kegels liegt. Um die zugehörigen Hüllen zu finden, bestimmt man durch Integration einer Differentialgleichung (s. *Knesers* Lehrbuch d. V. *R.* S. 156) die Beziehung zwischen den Scharparametern x_0, y_0 derjenigen Extremalen, die eine gemeinsame Hülle haben: Alle Kreise, die auf der Kurve

$$\sqrt{x^2+y^2} = A \cdot e^{\operatorname{ctg}\frac{T-\tau}{2}\cdot \operatorname{arctg}\frac{y}{x}} \tag{22.}$$

beginnen, berühren die ihr ähnliche logarithmische Spirale

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{A \cdot \sin\dfrac{T-\tau}{2}}{\sin\dfrac{\tau}{2}} \cdot e^{\operatorname{ctg}\frac{T-\tau}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\pi-\frac{T}{2}\right)}. \tag{23.}$$

Im räumlichen Felde haben diejenigen Feldkurven, die auf der Kurve (22.) der Bodenfläche beginnen, die Kurve (23.) der Brennfläche, also die Linie

$$z = C\sqrt{x^2+y^2} = C \cdot A \cdot \frac{\sin\dfrac{T-\tau}{2}}{\sin\dfrac{\tau}{2}} e^{\operatorname{ctg}\frac{T-\tau}{2}\cdot\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\pi-\frac{T}{2}\right)}$$

zur Hülle.

Diese Kurve besitzt die Evoluteneigenschaft in bezug auf

$$I = \tfrac{1}{2}\int (x y' - y x')\, dt,$$

die in folgendem besteht: das Integral I längs einer Extremale zwischen Boden- und Brennfläche unterscheidet sich von dem Integral längs einer zur selben Hülle gehörenden Feldkurve um das Integral I für den Bogen der Hüllkurve zwischen den Berührungspunkten der beiden Extremalen.

Will man die Werte T des Brennpunktparameters explizite darstellen, so muß man für $C = \cos\frac{\tau}{2}$ einen Zahlenwert ansetzen. Der einfachste Fall ergibt sich für $C = 0$, also, wenn man die x, y-Ebene als Bodenfläche wählt.

3. Die Gleichungen des Feldes mit der *Bodenfläche* $z = 0$ ergeben sich aus den Gleichungen (18.) für $\varphi = \varphi' = 0$:

$$x = \frac{x_0}{2}(1+\cos t) - \frac{y_0}{2}\sin t,$$

$$y = \frac{y_0}{2}(1+\cos t) + \frac{x_0}{2}\sin t,$$

$$z = \frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{2}\, t.$$

Die ebenen Feldkurven sind die Kreise durch den Koordinatenursprung und den Punkt (x_0, y_0) mit dem Durchmesser $\sqrt{x_0^2+y_0^2}$; die Tangente im Punkte 0 steht also auf dem zugehörigen Radiusvektor senkrecht.

Für den Brennpunktsparameter ergibt sich nach (21.)

$$\cos\frac{t}{2}\left(\cos\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\right)=0.$$

Der erste, zum Parameterwert $t=\pi$ gehörige Brennpunkt der räumlichen Feldkurven liegt auf der z-Achse. Der Ort derjenigen Brennpunkte, die für den Wert $t=T=\text{arc }320^0\,40'\,16''$ erreicht werden, ist ein Kegel mit der Gleichung

$$x^2+y^2=z^2\sin^2\frac{T}{2}.$$

Die räumlichen Extremalen sind Schraubenlinien, die mit der x, y-Ebene einen Winkel von 45^0 bilden und nach einem halben Umlauf die z-Achse schneiden. Dann berühren sie den Kegel mit dem Öffnungswinkel

$$\alpha_2=\text{arctg (sin }2.7984)=\text{arc }18^0\,35'\,55''$$

und der Spitze $x=y=0$. Bei jedem neuen Umlauf schneidet die Kurve die z-Achse und berührt einen Kegel. Da die Wurzeln der Gleichung $\cos\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}=0$ sich asymptotisch den Werten $\frac{t}{2}=\pi k$ mit ganzzahligem k nähern, so nimmt der Öffnungswinkel dieser Kegel mit wachsender Zahl der Umläufe ab.

Auf dem Kegel $x^2+y^2=z^2\sin^2\frac{T}{2}$, der zu einem Werte $T=-2\,\text{arctg}\frac{T}{2}$ gehört, liegen die Hüllkurven der räumlichen Extremalen, deren Projektionen in die Ebene $z=0$ die logarithmischen Spiralen

$$\sqrt{x^2+y^2}=-A\cos\frac{T}{2}\,e^{\frac{2}{T}\,\text{arctg}\frac{y}{x}}$$

sind (Fig. 1.). Die Anfangspunkte aller Kreise, die eine solche Hülle (h.) berühren, liegen auf einer ähnlichen logarithmischen Spirale

$$\sqrt{x^2+y^2}=A\cdot e^{\frac{2}{T}\,\text{arctg}\frac{y}{x}},$$

die Mittelpunkte gehören der Kurve

$$\sqrt{x^2+y^2}=\tfrac{1}{2}A\,e^{\frac{2}{T}\,\text{arctg}\frac{y}{x}}$$

an.

Ein Feld der eben behandelten Art erscheint bei folgender Aufgabe:

Ein fester Punkt 1 ist mit einem irgendwo in der Ebene zu suchenden Punkte 0 durch eine Kurve von fest vorgeschriebener Länge l zu verbinden, welche zusammen mit den Radienvektoren der Kurvenendpunkte in bezug auf einen festen, von 1 verschiedenen Punkt M einen möglichst großen Sektor einschließt.

Ein ähnliches Feld mit der x, y-Ebene als Bodenfläche kann man zum Beweise einiger *Steiner*schen Sätze benutzen:

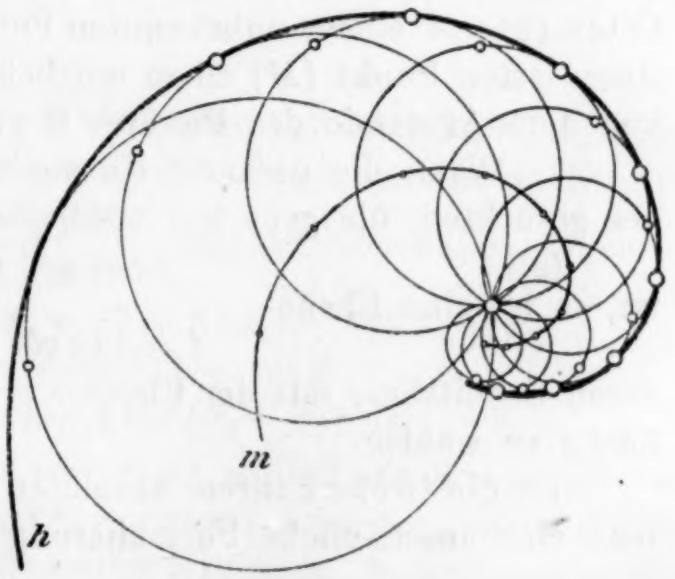


Fig. 1.

z. B.[1]) wenn eine Figur bestimmt werden soll, deren Grenzlinie aus drei Strecken von der Länge a, b und c sowie einer Linie von der gegebenen Länge l besteht, und die einen möglichst großen Inhalt hat. In diesem Falle wird man (Fig. 2.) die Strecke a in die x-Achse, ihren einen Endpunkt in den Koordinatenanfangspunkt legen, von diesem aus die Strecke b und von deren andern Endpunkt die Strecke c in beliebig wählbarer Richtung auftragen. Der freie Endpunkt 0 von c liegt dann irgendwo in dem Gebiete $\sqrt{x^2+y^2} \leqq b+c$ der Ebene, und zwar ist durch die Wahl des Punktes $0\,(x_0, y_0)$ der Winkel zwischen b und c ($\sphericalangle B$) und der Inhalt des Dreiecks $A\,B\,0$ festgelegt; für den letzteren ergibt sich

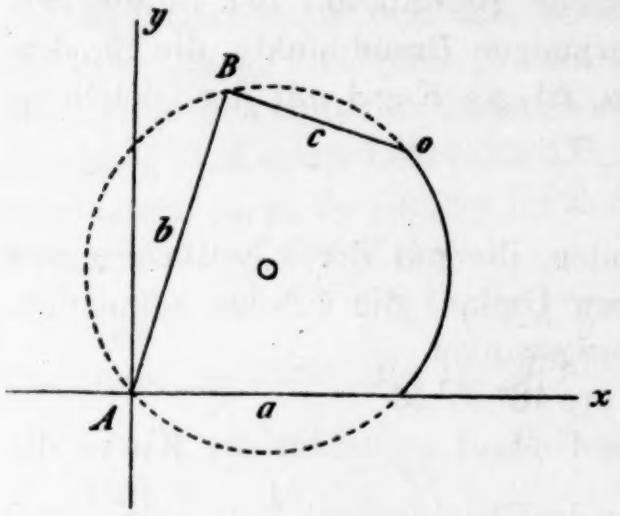


Fig. 2.

$$i = \tfrac{1}{4}\sqrt{[(b+c)^2 - (x_0^2+y_0^2)]\,[(x_0^2+y_0^2) - (b-c)^2]},$$

somit ist die Größe

$$I = \tfrac{1}{4}\sqrt{[(b+c)^2 - (x_0^2+y_0^2)]\,[(x_0^2+y_0^2) - (b-c)^2]} + \tfrac{1}{2}\int_0^1 (xy' - yx')\,dt$$

zum Extremum zu machen. Aus der Transversalitätsbedingung

$$\Big(-\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x\,\frac{b^2+c^2-(x^2+y^2)}{4i} + \lambda\frac{dx}{ds}\Big)\delta x + \Big(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\,\frac{b^2+c^2-(x^2+y^2)}{4i} + \lambda\frac{dy}{ds}\Big)\delta y - \lambda\delta z\Big|^0 = 0$$

folgert man, da $\delta x|^0$ und $\delta y|^0$ willkürlich, $\delta z|^0 = 0$ sind, daß die gesuchte Extremale ein Bogen des Umkreises des Dreiecks $A\,B\,0$ ist.

Zur Untersuchung der hinreichenden Bedingungen für das Vorhandensein des Extremums hat man jetzt die Feldkurven zu bestimmen und in analoger Weise wie zuvor die Brennpunkte zu ermitteln, zu denen der Nullpunkt gehört. —

Ein Feld, welches zu einer Rotationsfläche transversal steht, wird dann zur Prüfung der Extremumseigenschaft benutzt, wenn die Kurve zwischen einem festen (1) und einem unbekannten Punkte (0) gesucht wird, welche in bezug auf einen festen Punkt (M) einen möglichst großen Sektor hat, während ihre Länge von dem Abstande des Punktes 0 von M abhängt.

4. Wenn die gesamte Kurvenlänge eine lineare Funktion des Abstandes des gesuchten, übrigens frei wählbaren Punktes 0 von einer gegebenen Geraden

(g.) $$x\cos\gamma + y\sin\gamma - \delta = 0$$

ist, so ist eine Ebene

$$z = c\,(x\cos\gamma + y\sin\gamma) + \delta,$$

deren Schnittlinie mit der Ebene $z = 0$ zur Geraden (g.) parallel ist, als Bodenfläche zu wählen.

Ist die Größe c ihrem absoluten Betrage nach nicht kleiner als 1, so erhält man eine anschauliche Formulierung der Aufgabe, indem man $c = \operatorname{cosec}\varepsilon$ und

[1]) *Steiner*, Werke II. S. 199. Nr. 23.

mithin $z_0 = \frac{1}{\sin \varepsilon}(x \cos \gamma + y \sin \gamma) + \delta$ setzt (Fig. 3). Dann kann man die Aufgabe in folgender Weise aussprechen: In der Ebene sei in jedem Punkte ein Ring angebracht, der jedoch auf die Gestalt eines in der Ebene beweglichen Fadens von der Länge l nur dann Einfluß gewinnt, wenn der Faden durch ihn hindurchgeführt wird. Das eine Ende sei im Punkte 1 befestigt, das andere gleite auf einer festen Geraden g. Der Faden soll durch einen der Ringe 0 derart geleitet werden, daß die Fadenkurve zwischen 0 und 1 einen möglichst großen Sektor in bezug auf den festen Punkt M begrenzt, während der übrige Teil des Fadens zwischen dem Ringe und der Geraden geradlinig in vorgeschriebener Richtung gespannt ist.

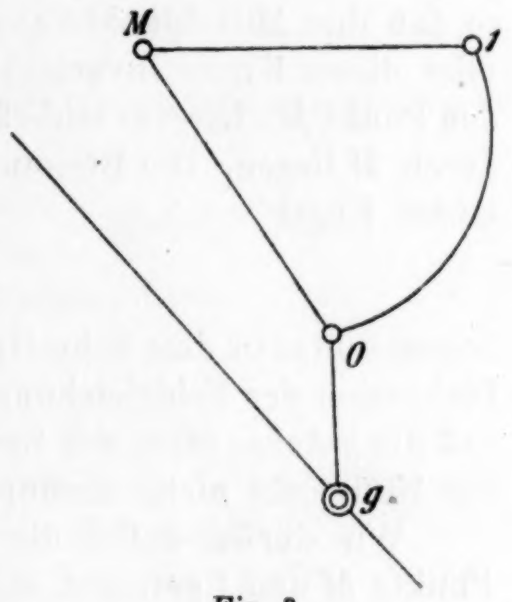


Fig. 3.

Die Gleichungen der Extremalen gewinnen wir mittels der oben entwickelten Beziehungen (10.).

Führt man in diese statt x_0, y_0 die Polarkoordinaten r_0, ϑ_0 ein und ersetzt $\varphi(x_0, y_0)$ durch

$$c(x_0 \cos \gamma + y_0 \sin \gamma) + \delta = c r_0 \cos(\vartheta_0 - \gamma) + \delta,$$

so erhält man für die Bestimmung von λ die quadratische Gleichung:

$$\lambda^2 (1 - c^2) + \lambda r_0 c \sin(\gamma - \vartheta_0) - \tfrac{1}{4} r_0^2 = 0, \tag{24.}$$

und hieraus ergibt sich ein Ausdruck der folgenden Form für

$$\lambda = r_0 \cdot h(\vartheta_0), \tag{25.}$$

und zwar für $c^2 = 1$: $h(\vartheta_0) = \dfrac{-1}{4} \dfrac{r_0}{\sin(\vartheta_0 - \gamma)}$,

für $c^2 \neq 1$: $h(\vartheta_0) = \dfrac{1}{2(1 - c^2)} \left\{ c \cdot \sin(\vartheta_0 - \gamma) \pm \sqrt{1 - c^2 \cos^2(\vartheta_0 - \gamma)} \right\}$.

Die Gleichungen der Extremalen lauten

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}[x_0 (1 + \cos t) - y_0 \sin t] - \lambda [\alpha \sin t - \beta (1 - \cos t)], \\ y &= \tfrac{1}{2}[y_0 (1 + \cos t) + x_0 \sin t] - \lambda [\beta \sin t + \alpha (1 - \cos t)], \\ z &= c [x_0 \cos \gamma + y_0 \sin \gamma] + d - \lambda t. \end{aligned} \tag{26.}$$

Diese Kurven besitzen die Extremumseigenschaft nur auf dem Bogen zwischen dem Anfangspunkte und demjenigen Punkte, dessen Parameterwert t als erste Nullstelle der *Jacobi*schen Determinante $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, t)}$ folgende Gleichung erfüllt:

$$\begin{aligned} &-\tfrac{1}{2} (h(\vartheta_0))^2 t \sin t + [\tfrac{1}{2} c \sin(\vartheta_0 - \gamma) + h(\vartheta_0) c^2]^2 (1 - \cos t) \\ &- [h(\vartheta_0)(1 - c^2) - \tfrac{1}{2} c \sin(\vartheta_0 - \gamma)]^2 (1 + \cos t) \\ &+ c \cos(\vartheta_0 - \gamma) [h(\vartheta_0)(1 - c^2) - \tfrac{1}{2} \sin(\vartheta_0 - \gamma)] \sin t = 0. \end{aligned} \tag{27.}$$

Die Wurzeln dieser Gleichung hängen nur von ϑ_0 ab, so daß alle Kreise, die von derselben Geraden durch den Nullpunkt ($\vartheta_0 = \text{const.}$) ausgehen, ihren Brennpunkt für den gleichen Wert $T(\vartheta_0)$ des Parameters erreichen. Außerdem sind ihre Radien sowie die Koordinaten ihrer Mittelpunkte:

$$a = \tfrac{1}{2} r_0 \left[\cos \vartheta_0 + \frac{c \sin \gamma}{1 - c^2}\left(c \sin (\vartheta_0 - \gamma) \pm \sqrt{1 - c^2 \cos^2 (\vartheta_0 - \gamma)}\right)\right],$$

$$b = \tfrac{1}{2} r_0 \left[\sin \vartheta_0 - \frac{c \cdot \cos \gamma}{1 - c^2}\left(c \sin (\vartheta_0 - \gamma) \pm \sqrt{1 - c^2 \cos^2 (\vartheta_0 - \gamma)}\right)\right]$$

proportional dem Abstande r_0 ihres Anfangspunktes vom Koordinatenursprung M, so daß ihre Mittelpunkte auch auf einer Geraden durch M liegen und die Schar aller dieser Kreise invariant ist gegenüber einer Ähnlichkeitstransformation um den Punkt M. Hieraus schließen wir, daß auch ihre Brennpunkte auf einer Geraden durch M liegen. Die Brennpunkte aller Kurven des räumlichen Feldes liegen auf einem Kegel

$$\omega\left(\frac{x}{z - \delta}, \frac{y}{z - \delta}\right) = 0,$$

dessen Spitze in dem Schnittpunkte der Bodenfläche mit der z-Achse liegt. Durch Diskussion der Feldgleichungen und der *Jacobi*schen Determinante erkennt man, daß die z-Achse nicht der Brennfläche angehört, oder, was dasselbe bedeutet, daß der Nullpunkt nicht Brennpunkt der ebenen Extremalen sein kann.

Wir dürfen daher die einschränkende Festsetzung fallen lassen, daß die Punkte M und 1 getrennt sein müssen. Darum können wir die *Aufgabe* folgendermaßen formulieren:

In der Ebene ist durch einen festen Punkt 1 eine Kurve zu ziehen, deren zweiter Endpunkt 0 und Verlauf durch die folgenden Bedingungen bestimmt ist: der Bogen der gesuchten Kurve soll zusammen mit seiner Sehne eine möglichst große Fläche umschließen, während die Bogenlänge eine vorgeschriebene lineare Funktion des Abstandes des freien Endpunktes 0 von einer gegebenen Geraden ist.

Aufgaben b): $I = \int y x' \, dt$; $G = \sqrt{x'^2 + y'^2}$.

Es ist zu setzen

$$\Phi = y x' + \lambda (- z' + \sqrt{x'^2 + y'^2}). \tag{28.}$$

Die Differentialgleichungen des Problems

$$\frac{d}{dt}\left\{y + \lambda \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right\} = 0; \quad x' - \frac{d}{dt}\left\{\lambda \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right\} = 0 \tag{29.}$$

liefern die ersten Integrale

$$y + \lambda \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = b; \quad x - \lambda \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = a,$$

aus denen wir die Gleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \lambda^2 \tag{30.}$$

der ebenen Extremalen ableiten. Da die *Weierstraß*sche Bedingung wie zuvor $\lambda < 0$ liefert, so führen wir den Parameter t ein durch die Gleichung

$$t = - \frac{s}{\lambda}.$$

Sollen die Werte x_0, y_0, z_0 der Koordinaten x, y, z für $t = 0$ erreicht werden, so erhält man für die räumlichen Extremalen die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= a + (x_0 - a) \cos t + (y_0 - b) \sin t, \\ y &= b - (x_0 - a) \sin t + (y_0 - b) \cos t, \\ z &= z_0 - \lambda t; \quad \lambda^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2. \end{aligned} \tag{31.}$$

Aus der Forderung, daß die Extremalen in den Punkten 0 von der Bodenfläche $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$ transversal ausstrahlen sollen, ergibt sich unter Benutzung der ersten Integrale nach (10.) die folgende Doppelgleichung:

$$-b : (a - x_0) : \lambda = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} : \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} : 1 .$$

Diese Proportionen bestimmen im Verein mit der Gleichung

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = \lambda^2$$

die Größen λ, a und b als Funktionen von x_0 und y_0. Aus diesen Beziehungen ergibt sich für λ die Gleichung:

$$(32.) \qquad \lambda^2 \left[1 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}\right)^2\right] + 2\lambda y_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} - y_0^2 = 0;$$

die Ermittlung der gesuchten Kurven ist durchführbar, wenn

$$y_0^2 \left(1 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}\right)^2\right) > 0$$

oder wenn

$$y_0^2 (\cos^2 (n, z_0) - \cos^2 (n, y_0)) > 0$$

ist. Von Punkten der z, x-Ebene und von solchen Punkten der Bodenfläche, deren Normale mit der z-Achse einen größeren oder ebenso großen spitzen Winkel bildet als mit der y-Achse, kann keine Feldkurve ausgehen. Von allen andern Punkten der Bodenfläche gehen zwei Extremalen aus, und von diesen wird wenigstens eine ein Maximum im Vergleich zu den benachbarten liefern, wenn entweder die Ausdrücke $y_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$ und $1 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}\right)^2$ negativ oder der zweite von ihnen positiv ist.

1. Die Berechnung von λ, a, b gestaltet sich besonders einfach, wenn $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \equiv 0$ und φ nur von y_0 abhängig ist. Es ergibt sich:

$$(33.) \quad \lambda = \frac{\varepsilon y_0}{\sqrt{1 - \varphi'(y_0)^2}}; \quad a = -\frac{\varepsilon y_0 \varphi'(y_0)}{\sqrt{1 - \varphi'(y_0)^2}}; \quad b = 0; \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Die Mittelpunkte der Kreise liegen auf der x-Achse. Die Gleichungen der räumlichen Extremalen lauten:

$$x = x_0 - y_0 \varepsilon \frac{\varphi'}{\sqrt{1 - \varphi'^2}} (1 - \cos t) + y_0 \sin t,$$

$$(34.) \qquad y = y_0 \cos t - y_0 \varepsilon \frac{\varphi'}{\sqrt{1 - \varphi'^2}} \sin t,$$

$$z = \varphi(y_0) - \frac{\varepsilon y_0}{\sqrt{1 - \varphi'(y_0)^2}} t.$$

Der Parameterwert im Brennpunkte ist eine Nullstelle der *Jacobi*schen Determinante bzw. der folgenden Gleichung:

$$(35.) \quad \begin{aligned} &\varepsilon \sqrt{1 - \varphi'^2} \cdot \cos t + \left(\varphi'(y_0) + \frac{\varphi'(y_0)}{1 - \varphi'(y_0)^2} + y_0 \frac{\varphi''(y_0)}{(1 - \varphi'(y_0)^2)^2}\right) \sin t \\ &- \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varphi'^2}} \left(1 + \frac{\varphi'' \cdot \varphi' \cdot y_0}{1 - \varphi'^2}\right) t \left(\sin t + \frac{\varepsilon \varphi'}{\sqrt{1 - \varphi'^2}} \cos t\right) = 0; \end{aligned}$$

daher hängt er nur von y_0 ab, so daß sämtliche Kreise, die auf derselben Geraden $y_0 = \text{const.}$ beginnen, den Brennpunkt für den gleichen Wert des Zentriwinkels erreichen.

Dieses Feld erscheint, wenn unter allen Kurven in der Ebene durch einen festen Punkt 1 und einen frei wählbaren Punkt 0, deren Länge von dem Abstande des freien Punktes 0 von einer gegebenen Geraden ($y = 0$) abhängt, diejenige zu finden ist, die zusammen mit der Geraden ($y = 0$) und den Loten aus den Kurvenendpunkten auf sie eine möglichst große Fläche umschließt.

2. Ist die Länge fest vorgeschrieben, unabhängig von der Lage des freien Punktes, so ist die Ebene selbst als Bodenfläche zu wählen, also $\varphi(x_0, y_0) \equiv 0$ zu setzen.

Die Kurven dieses Feldes, die mit dem Parameterwert $t = 0$ im Punkte ($x_0, y_0, z_0 = 0$) auf der Ebene $z = 0$ transversal stehen, haben die folgenden Gleichungen:

$$x = x_0 + y_0 \sin t;\ y = y_0 \cos t;\ \ z = -\varepsilon y_0 t.$$

Die ebenen Extremalen sind die Kreise, deren Mittelpunkt auf der x-Achse liegt; ihre Tangente im Punkte (x_0, y_0) ist zu dieser Achse parallel.

Die Bedingung für den Brennpunktsparameter lautet nach (35.)

$$\cos t + t \sin t = 0,$$

ihre erste positive Wurzel ist der Wert $T = \text{arc } 160^0\,20'\,8''$, während die zweite bei arc 350^0 liegt. Die zu einer Wurzel T der Gleichung gehörige Brennfläche ist die zur x-Achse parallele Ebene

$$y = \varepsilon \sin T \cdot z.$$

Die Hüllinien der ebenen wie der räumlichen Extremalen sind Gerade, und zwar haben diejenigen Feldkurven, die auf der Geraden

$$x \sin T + y = C$$

der x, y-Ebene beginnen, die Hülle

$$x \sin T + y \cos T = C;\ \ y = \varepsilon \sin T \cdot z. \quad \text{(Fig. 4.)}$$

3. Wählt man eine Ebene in beliebiger Stellung

$$z = c\,(x \cdot \cos\gamma + y \sin\gamma) + d$$

zur Bodenfläche, so ist die Kurvenlänge eine lineare Funktion des Abstandes des Punktes 0 von einer Geraden

$$x \cos\gamma + y \sin\gamma = 0,$$

die nicht mit derjenigen Geraden ($y = 0$) zusammenfällt, welche zur Begrenzung der Fläche dient. Auch in diesem Falle ist die Brennfläche eine Ebene, die Hüllen sind Gerade.

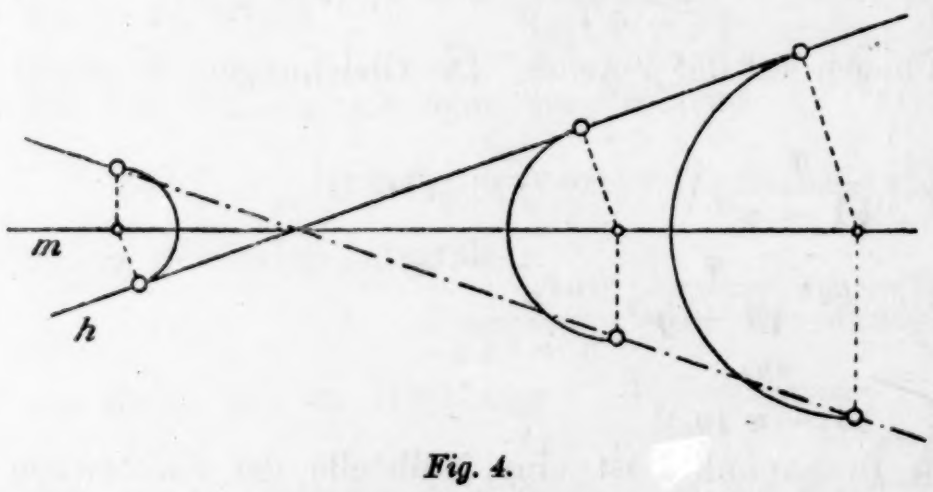


Fig. 4.

II. Die Kettenlinie.

Da $$I = \int y \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt,\ \ G = \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

so ist $$\Phi = y \sqrt{x'^2 + y'^2} + \lambda\,(-z' + \sqrt{x'^2 + y'^2})$$

zu setzen; durch Integration der *Euler*schen Differentialgleichungen

$$(36.)\ \frac{d}{dt}\left\{(y + \lambda)\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right\} = 0;\ \ \sqrt{x'^2 + y'^2} - \frac{d}{dt}\left\{(y + \lambda)\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right\} = 0$$

ergibt sich als Gleichung der ebenen Extremalen

$$y + \lambda = C \,\mathfrak{Cof}\, \frac{x + D}{C}.$$

Führt man $t = \dfrac{x + D}{C}$ als Parameter ein und bestimmt z mittels der Differentialgleichung $z' - \sqrt{x'^2 + y'^2} = 0$, so erhält man für diejenige Extremale, die mit dem Parameterwert $t = t_0$ im Punkte (x_0, y_0, z_0) beginnt, die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + C\,(t - t_0), \\ y &= y_0 + C\,(\mathfrak{Cof}\, t - \mathfrak{Cof}\, t_0), \\ z &= z_0 + C\,(\mathfrak{Sin}\, t - \mathfrak{Sin}\, t_0). \end{aligned} \tag{37.}$$

1. Soll die Kurve transversal zu einer gegebenen Fläche $z = \varphi\,(x, y)$ stehen, so ergeben sich für die Größen C und t_0 die Ausdrücke:

$$C = \frac{y_0 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_0}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_0}\,\mathfrak{Cof}\, t_0 - 1}, \quad \mathfrak{Sin}\, t_0 = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_0}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_0}}.$$

Es ergeben sich nur dann Kettenlinien als ebene Extremalen, wenn

$$y_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\,\mathfrak{Cof}\, t_0 - 1\right) = y_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_0} : \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\right)^2} - 1\right)$$

von Null verschieden ist. Verschwindet die Konstante C, so ist die ebene Feldkurve eine zur y-Achse parallele Gerade.

Als Bedingung für den konjugierten Punkt ergibt sich eine Gleichung der folgenden Form:

$$\begin{aligned} &A_1\,(x_0, y_0)\,\mathfrak{Cof}\, t + B_1\,(x_0, y_0)\,\mathfrak{Sin}\, t + C_1\,(x_0, y_0) \\ &+ t\,[A_2\,(x_0, y_0)\,\mathfrak{Cof}\, t + B_2\,(x_0, y_0)\,\mathfrak{Sin}\, t] = 0, \end{aligned} \tag{38.}$$

über deren Nullstellen sich nur eine Aussage machen läßt, wenn die Funktion $\varphi\,(x_0, y_0)$ gegeben ist.

2. Wählt man als Bodenfläche eine Ebene

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma,$$

so erhält man für die Extremalen die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + (t - t_0)\,\frac{\alpha y_0}{\alpha\,\mathfrak{Cof}\, t_0 - 1}, \\ y &= y_0 + (\mathfrak{Cof}\, t - \mathfrak{Cof}\, t_0)\,\frac{\alpha y_0}{\alpha\,\mathfrak{Cof}\, t_0 - 1}, \\ z &= z_0 + (\mathfrak{Sin}\, t - \mathfrak{Sin}\, t_0)\,\frac{\alpha y_0}{\alpha\,\mathfrak{Cof}\, t_0 - 1}, \quad z_0 = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma \end{aligned} \tag{39.}$$

wobei t_0 durch die Beziehung

$$\mathfrak{Sin}\, t_0 = \frac{\beta}{\alpha} \quad (\alpha \neq 0)$$

definiert ist.

Wie man durch Diskussion der Bedingung für den konjugierten Punkt:
$(1 + \alpha^2)\,\mathfrak{Cof}\, t + \alpha\beta\,\mathfrak{Cof}\, t_0\,\mathfrak{Sin}\, t + \alpha^2\,\mathfrak{Sin}\, t \cdot (t - t_0) - 2\alpha\,(1 + \mathfrak{Sin}\, t_0\,\mathfrak{Sin}\, t) = 0$
erkennt, existiert mindestens ein Brennpunkt auf jeder Feldkurve. Der Ort dieser Punkte, die Brennfläche, ist eine Ebene; die Hüllinien sind Gerade.

Über das größte Tetraeder, wenn die Inhalte der Flächen gegeben sind[1]).

Von Herrn *Rudolf Sturm* in Breslau.

1. Diese Inhalte seien α, α_1, α_2, α_3.

Zunächst seien einige leicht zu erledigende einfache Fälle vorgenommen[2]).

Die vier Flächen seien gleich: α, so ist das größte Tetraeder das regelmäßige als größtes unter allen, welche die Oberfläche 4α haben, also auch unter denen, bei welchen die einzelnen Flächen gleich α sind.

Ein gleichflächiges Tetraeder ist bekanntlich auch ein gleichseitiges, d. h. hat gleiche Gegenkanten, und die Flächen sind sogar kongruent.

Wenn drei Flächen gleich α_1 sind, die vierte $\alpha < 3\alpha_1$, so ist das größte Tetraeder die über dem gleichseitigen Dreiecke vom Inhalte α errichtete regelmäßige Pyramide, (d. h. deren Höhe im Mittelpunkt der Grundfläche ihren Fußpunkt hat), *mit einem Kosinus des Neigungswinkels der Seitenflächen gegen die Grundfläche gleich* $\frac{1}{3}\frac{\alpha_1}{\alpha}$.

Denn unter allen n-seitigen Pyramiden mit gegebenen Inhalten der Grundfläche und der Mantelfläche hat die regelmäßige den größten Inhalt, also auch unter denen, bei welchen die Seitenflächen gleich sind und zu denen diese Pyramide gehört.

Drittens sei $\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$. Dann gibt es ein Tetraeder mit einer dreirechtwinkligen Ecke; die Fläche α, welche ihr gegenüber liegt, hat die drei andern zu Normalprojektionen, und es ist daher $\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$; wir werden es gleich aus gegebenen α, α_1, . . . konstruieren. Von allen dreiseitigen Pyramiden mit gegebener Mantelfläche $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ *hat diejenige den größten Inhalt, bei welcher die Spitze dreirechtwinklig ist*, also auch unter denen, deren Seitenflächen einzeln α_1, α_2, α_3 sind und zu denen sie gehört.

In allen drei Fällen handelt es sich um *absolutes Maximum* und *ist dies größte Tetraeder ein Tetraeder mit Höhenschnittpunkt*[3]). Bei einem solchen sind bekannt-

[1]) *Lagrange,* Sur les pyramides, Berl. Akad. Abh. 1773; *Painvin,* Nouv. Annales 1862; *Paul Serret*, ebenda 1863; *Borchardt*, Berl. Akad. Abh. 1865, 1866; *Baltzer*, Determinanten § 17, 10; *Lebesgue*, Comptes rendus Bd. 66; *Kronecker* und *Borchardt*, Berliner Monatsberichte 1872.

[2]) Für welche die Sätze 147, 152, 142 aus meinen: Maxima und Minima in der elementaren Geometrie (1910) benutzt werden.

[3]) *Baltzer*, Elem. der Mathem. II Stereom. § 6, 10; *H. Vogt,* Progr. des Friedrichs-Gymn. Breslau 1881; Meine „Geom. Verwandtsch." Bd. I. Nr. 101.

lich alle Paare Gegenkanten rechtwinklig, und wenn zwei es sind, so sind es auch die dritten.

2. *Um ein Tetraeder mit Flächen von gegebenen Inhalten herzustellen, verwandeln wir es in eine einfachere Figur.*

Wenn die Flächen nach dem *Möbius*schen Kantengesetz benannt werden, d. h. so, daß jede Kante bei ihren Flächen in entgegengesetztem Sinne durchlaufen wird:

$$\alpha = A_1 A_2 A_3,\ \alpha_1 = A A_3 A_2,\ \alpha_2 = A A_1 A_3,\ \alpha_3 = A A_2 A_1,$$

so haben sie, von außen betrachtet, gleichen (positiven) Umlaufungssinn. *Auf den Flächen seien nach außen Lote errichtet und auf ihnen Strecken aufgetragen, welche in den Maßzahlen mit den Flächen übereinstimmen:* g, g_1, g_2, g_3; *so geben diese Strecken, ihrem Sinne entsprechend aneinandergereiht, ein geschlossenes Vierseit* [1]).

Zur Herstellung eines solchen Vierseits ist notwendig, daß, wenn etwa g die größte Seite ist und daher α die größte Fläche:

$$g < g_1 + g_2 + g_3,$$

demnach auch:

$$\alpha < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

was also angenommen wird.

Für die Diagonale l zwischen den Ecken $g\,g_3$ und $g_1\,g_2$, als gemeinsame Sehne der Dreiecke $g\,g_1\,l$ und $g_2\,g_3\,l$, gilt, daß sie kleiner als beide Summen $g + g_1$, $g_2 + g_3$, größer als die zugehörigen Differenzen sein muß. Dazu, daß jene größer sind als diese, genügt, $g_2 + g_3 > g - g_1$, was nach der Annahme erfüllt wird. Also muß l zwischen der kleineren Summe und der größeren Differenz genommen werden.

Wenn nun aus g, g_1, g_2, g_3 ein windschiefes Vierseit hergestellt ist, so werde an A eine Ecke konstruiert, deren Kanten Richtung und Sinn von g_1, g_2, g_3 haben, und ihre Polarecke a_1, a_2, a_3 mit den Kantenwinkeln $\mathfrak{a}_1 = a_2\,a_3, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$. In diese werden die Flächen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in folgender Weise gelegt. Die abschneidenden Seiten umhüllen Hyperbeln und erzeugen auf den Kanten als Asymptoten projektive Punktreihen. Dem A_1 auf a_1 entspreche A_2 auf a_2, A_3 auf a_3, A_1' auf a_1; A_1 und A_1' erzeugen eine hyperbolische Involution mit A als Zentralpunkt. Der Doppelpunkt A_1 auf der Kante a_1 und die ihm zugeordneten A_2, A_3, $A_1' \equiv A_1$ geben das Tetraeder $A\,A_1\,A_2\,A_3$ mit den Flächen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Übrigens ist auch:

$$A\,A_1^2 = \frac{2\,\alpha_2\,\alpha_3}{\alpha_1}\,\frac{\sin \mathfrak{a}_1}{\sin \mathfrak{a}_2 \cdot \sin \mathfrak{a}_3}, \ldots$$

Das zugehörige Vierseit stimmt in g_1, g_2, g_3 mit dem obigen überein, also wegen der Geschlossenheit auch in g. Sie ist normal zu $A_1\,A_2\,A_3$ und gibt ihren Inhalt wieder; er ist also α.

Damit ist ein Tetraeder $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *erhalten.* So kann man auch in eine dreirechtwinklige Ecke die $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ beschreiben, für die vierte Fläche gilt: $\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$.

3. Indem die Diagonale l eine obere und eine untere Grenze hat, *sind auch den Winkeln* $g g_1, g_2 g_3$ *obere und untere Grenzen gewiesen und daher auch den ihnen gleichen Flächenwinkeln des Tetraeders.*

---

[1]) *Baltzer*, Elem. II Trig. § 6, 4.

Wird also etwa $g_2 g_3$ (innerhalb dieser Grenzen) gegeben oder der Flächenwinkel an der Kante $A A_1$, so sind beide Dreiecke $g_2 g_3 l$, $g g_1 l$ vollständig bestimmt, also zunächst der Winkel $g g_1$.

Alle Tetraeder $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, *die denselben Winkel an der Kante* $A A_1$ *haben, haben auch denselben Flächenwinkel an der Gegenkante* $A_2 A_3$.

Auch die Winkel $g l, g_1 l, g_2 l, g_3 l$ sind mit $g_2 g_3$ (oder $g g_1$) fest; die Diagonale l hat die Richtung des gemeinsamen Lots zwischen $A A_1$, $A_2 A_3$; also sind mit jenen Winkeln auch die dieses Lots gegen die vier Ebenen fest.

Ferner, die Flächenwinkel des Vierseits an den Diagonalen l und m, nämlich $l (g g_1, g_2 g_3)$ und $m (g_3 g, g_1 g_2)$, sind gleich den Winkeln der Gegenkanten $A A_1$, $A_2 A_3$ bzw. $A A_3$, $A_1 A_2$.

Einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt, bei dem zwei Paare Gegenkanten rechtwinklig sind und dann auch das dritte, *entspricht ein Vierseit, bei dem diese Flächenwinkel* l, m *Rechte sind.*

4. *Ein solches Vierseit existiert.* Die beiden Ebenen $\beta = g g_1$, $\gamma = g_2 g_3$, die sich in l schneiden, seien rechtwinklig; wir konstruieren je zu gegebenem l die Punkte $g g_1, g_2 g_3$ durch Kreise. Die obere Grenze sei etwa $g_2 + g_3$; für sie berühren die Kreise in γ sich von außen; m fällt in β, beide Ebenen des Flächenwinkels m tun es auch, und zwar mit dem Flächenwinkel 180^0. Bei der unteren Grenze haben wir Umschließungs-Berührung und den Flächenwinkel 0^0. Also durchläuft der Winkel m alle Werte von 180^0 bis 0^0, jeden eine ungerade Anzahl von Malen, geht also mindestens einmal durch 90^0.

Es bestehen daher Tetraeder $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *mit Höhenschnitt in ungerader Anzahl, mindestens eins.*

5. *Für den Inhalt* T *von* $A A_1 A_2 A_3$ *haben wir:*

$$9 I^2 = 2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \Sigma',$$

worin Σ' der „zweite Sinus“ $\sin a_2 \sin a_3 \sin a_1 = \cdots$ der Ecke A ist [1]). Also handelt es sich um den größten Wert von Σ'. Aber dieser zweite Sinus ist gleich dem ersten Sinus der Ecke, zu der sie polar konstruiert wurde, und daher wiederum gleich der aus den parallelen Seiten g_1, g_2, g_3 des Vierseits gebildeten Größe:

$$\mathfrak{S} = \sin g_1 g_2 \sin g_2 g_3 \sin g_2,$$

wo g_2 der Flächenwinkel $g_2 (g_1 m, g_3 l)$ ist. Wenn $l = l (g g_1, g_2 g_3)$, so gibt die Ecke $g_1 g_2 l$:

$$\sin g_1 g_2 \cdot \sin g_2 = \sin g_1 l \cdot \sin l;$$

also:

$$\mathfrak{S} = \sin g_2 g_3 \cdot \sin g_1 l \cdot \sin l.$$

Wir fanden, daß mit $\sphericalangle g_2 g_3$ auch $\sphericalangle g_1 l$ fest ist; folglich hat $\mathfrak{S}$ dann den größten Wert, wenn $l = 90^0$ ist.

Von allen Tetraedern $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, *welche einen festen Flächenwinkel an der Kante* $A A_1$ *haben und daher auch an der Gegenkante* $A_2 A_3$, *hat dasjenige den größten Inhalt, bei welchem diese Gegenkanten rechtwinklig sind.*

---

[1]) *Baltzer,* Elem. II Trig. § 6, 16.

So ergeben sich *drei Reihen größter Tetraeder* $R_{01,23}$, $R_{02,31}$, $R_{03,12}$. *Und nur ein Tetraeder mit durchweg rechtwinkligen Gegenkanten, also mit Höhenschnitt, kann größtes sein*, da bei einem andern sofort ein größeres angegeben werden kann.

6. In bezug auf die drei Flächenwinkel einer Ecke gilt bekanntlich:

$$a_1 + a_2 + a_3 > 180^0;$$

aber weniger bekannt, wenn auch sehr leicht abzuleiten, ist die andere aus der Betrachtung der Polarecke sich ergebende Eigenschaft:

$$180^0 - a_3 < (180^0 - a_1) + (180^0 - a_2),$$

oder:

$$a_3 > a_1 + a_2 - 180^0,$$

woraus nebenbei folgt, daß, wenn $a_1 + a_2 + a_3 > 360^0$, alle drei Winkel stumpf sein müssen [1]). Wir können beide so aussprechen:

Je nachdem $a_1 + a_2 <$ *oder* $> 180^0$ *ist, ist* $a_3 > 180^0 - (a_1 + a_2)$ *oder* $a_3 > a_1 + a_2 - 180^0$, *auch wenn* a_3 *der kleinste ist.*

Es läßt sich beides in *einer Formel* vereinigen. Für Σ' gilt:

$$\Sigma'^2 = \begin{vmatrix} 1 & -\cos a_3 & -\cos a_2 \\ -\cos a_3 & 1 & -\cos a_1 \\ -\cos a_2 & -\cos a_1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 - 2\cos a_1 \cos a_2 \cos a_3 - \cos^2 a_1 - \cos^2 a_2 - \cos^2 a_3 \text{ [2])}.$$

Umgekehrt, *wenn diese Größe positiv ist, (ihr höchster Wert ist* 1), *so genügen die drei Winkel den obigen Beziehungen und sind Flächenwinkel einer Ecke.* Wir haben dann:

$$(\cos a_3 + \cos a_1 \cos a_2)^2 - (1 - \cos^2 a_1)\,(1_1 - \cos^2 a_2) < 0,$$

$$\pm (\cos a_3 + \cos a_1 \cos a_2) < \sin a_1 \sin a_2,$$

je nachdem die Klammer positiv oder negativ ist.

Der erste Fall gibt: $\cos a_3 < -\cos (a_1 + a_2)$,

$$\cos a_3 < \cos (180^0 - (a_1 + a_2)) \text{ oder } < \cos (a_1 + a_2 - 180^0),$$

je nachdem $a_1 + a_2 <$ oder $> 180^0$. Also, da es sich um lauter Winkel unter 180^0 handelt:

$$a_3 > 180^0 - (a_1 + a_2) \text{ oder } > a_1 + a_2 - 180^0.$$

Im zweiten Fall haben wir:

$$-\cos a_3 < \cos a_1 \cos a_2 + \sin a_1 \sin a_2,$$

aber wegen: $\cos a_3 + \cos a_1 \cos a_2 < 0$ auch: $-2\cos a_3 > 2\cos a_1 \cos a_2$; also durch Subtraktion:

$$-\cos a_3 > \cos (a_1 + a_2),\ \cos (180^0 - a_3) > \cos (a_1 + a_2),$$

daher wenn $a_1 + a_2 < 180^0$:

$$180^0 - a_3 < a_1 + a_2,\ a_3 > 180^0 - (a_1 + a_2);$$

wenn aber $a_1 + a_2 > 180^0$, dann:

$$\cos (180^0 - a_3) > \cos (360^0 - (a_1 + a_2)),$$

$$180^0 - a_3 < 360^0 - (a_1 + a_2),\ a_3 > a_1 + a_2 - 180^0.$$

7. Wir ersetzen $\cos a_1$, $\cos a_2$, $\cos a_3$ durch x y, z, welche wir als rechtwinklige

---

[1]) Zeitschr. f. Mathem. und naturw. Unterr. Bd. 45, S. 272.

[2]) *Baltzer*, ebenda § 5, 11.

Koordinaten auffassen, und untersuchen die Flächen der Ordnung:

$$1 - 2xyz - x^2 - y^2 - z^2 = \sigma,\ 1 \geqq \sigma \geqq 0,$$

wo $\sigma = \Sigma'^2$ das Quadrat des zweiten Sinus der Ecke mit den Kosinussen x, y, z ist, wenn diese echte Brüche sind.

Die Punkte mit echten Brüchen als Koordinaten liegen innerhalb des Parallelepipeds Π, das von den Ebenen $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$ eingeschlossen wird. Jene Flächen sind *zweischalige Flächen 3. Ordnung* von der insbesondere durch negative Eigenschaften bemerkenswerten Gattung *aus 3 reellen Geraden und 24 punktierten* [1]). Die drei reellen Geraden liegen auf der unpaaren Schale, welche außerhalb Π sich befindet, unendlich fern auf der Koordinatenebene. Uns interessiert fast nur *die paare Schale, welche von Π eingeschlossen wird.*

Bei der Fläche $\sigma = 0$ stehen die beiden Schalen in Zusammenhang durch Knotenpunkte in den vier Ecken $(-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1), (-1,-1,-1)$ von Π; die sechs Verbindungslinien derselben, je eine Diagonale der sechs Parallelogramme von Π, sind quaternäre Geraden, längs deren die Fläche von den Ebenen von Π berührt wird [2]).

Nur innerhalb der paaren Schale S dieser Fläche liegen Punkte, deren Koordinaten x, y, z Kosinus von Flächenwinkeln einer Ecke sind.

Bei den anderen (knotenpunktslosen) Flächen $\sigma > 0$ sind die beiden Schalen getrennt und die paaren schließen die für größeres σ ein, welche immer kleiner werden, bis bei $\sigma = 1$ Reduktion auf einen Punkt, den Anfangspunkt, stattfindet, der ein isolierter Knotenpunkt ist. Über die *Gestalt* dieser paaren Schalen orientieren uns das Parallelepiped durchschneidende Parallelebenen zu einer Koordinatenebene, wobei $x = h, y = h, z = h$ kongruente Schnitte haben. Betrachten wir $z = h$ ($|h| < 1$); der Schnitt, in dessen Ebene die eine unendlich ferne Gerade der Fläche liegt, ist eine Ellipse: der Mittelpunkt liegt auf der z-Achse, die Achsen sind den Diagonalen in $z = \pm 1$ parallel, die Halbachsen-Quadrate sind $1 + h - \frac{\sigma}{1-h}$, $1 - h - \frac{\sigma}{1+h}$ und werden mit wachsendem σ immer kleiner, schließlich zugleich negativ und die Ellipsen dann imaginär. In $z = 0$ ist die Ellipse ein Kreis, in $z = \pm 1$, $z = \pm\sqrt{1-\sigma}$ liegen imaginäre Geradenpaare mit reellen Doppelpunkten. Das gibt die 24 punktierten Geraden. Diese vier Geradenpaare rücken bei $\sigma = 0$ zu je zweien zusammen in die Doppelgerade des Punktepaares der Knotenpunkte in $z = \pm 1$. Die Parallelschnitte außerhalb Π geben Hyperbeln, welche die unpaare Schale erzeugen.

Diese paaren Schalen (σ) werden von jeder schneidenden Ebene in dem *im Endlichen bleibenden paaren Zuge* (*Oval*) einer zweizügigen Kurve 3. Ordnung geschnitten, deren unpaarer Zug von der unpaaren Schale herrührt und außerhalb Π liegt. Ein solches Oval einer Kurve 3. Ordnung ist nach außen konvex; daher *ist die Schale* (σ) *durchweg elliptischer* (positiver) *Krümmung*; eine paare Schale einer kubischen Fläche, die von einer Geraden zweimal oder gar nicht getroffen wird, kann ja auch keine reelle dreipunktig berührende Tangente haben.

---

[1]) Meine „Flächen 3. Ordnung" (1867) S. 30 — dritte Gattung —; Geometr. Verwandtsch. Bd. IV (1909) Nr 911/912 — Gattung V; Schläfli, Annali di matematica 2. Serie Bd. 5.

[2]) Flächen 3. Ordnung Nr. 123 ff.

8. *In bezug auf die vier Tetraederflächen besteht die Beziehung*:

$$\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - 2\alpha_2\,\alpha_3 \cos a_1 - 2\alpha_3\,\alpha_1 \cos a_2 - 2\alpha_1\,\alpha_2 \cos a_3$$ [1])

oder:

$$\alpha_2\,\alpha_3 \cos \alpha_1 + \alpha_3\,\alpha_1 \cos \alpha_2 + \alpha_1\,\alpha_2 \cos \alpha_3 + c = 0,$$

worin die Konstante $c = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2)$ ist.

Folglich liegen in der Ebene:

(1.) $$\alpha_2\,\alpha_3\,x + \alpha_3\,\alpha_1\,y + \alpha_1\,\alpha_2 z + c = 0$$

die Punkte, deren Koordinaten Kosinus der Flächenwinkel an der Ecke A von Tetraedern $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *sind, aber nur innerhalb der Schnitte mit* S; und das ist nur ein kleiner Teil der Ebenen. Insofern ist die Bedingung (1.) eine unvollkommene.

Weil wir voraussetzen, daß die größte der vier Flächen kleiner ist als die Summe der anderen, so existieren Tetraeder $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$; also schneidet die Ebene (1.) die Schale S und zunächst die paaren Schalen (σ) der folgenden Flächen, während die auf einen Punkt reduzierte Schale von $\sigma = 1$ und die vorangehenden nicht geschnitten werden. Folglich *muß eine Schale* (σ_m) *berühren*, und weil sie elliptischer Krümmung ist, hat sie mit (1.) nur den Berührungspunkt B_m gemeinsam, den isolierten Doppelpunkt, auf den sich das Oval von (σ_m) reduziert hat.

Daher liegt (σ_m) ganz auf der einen Seite von (1.), und um so mehr die von (σ_m) umschlossenen Schalen mit größeren σ und diese werden nicht geschnitten. *Die Berührung ist die einzige*; σ_m ist der größte Wert von Σ'^2, der von Tetraedern $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ erreicht wird. Das zu den Koordinaten von B_m als Kosinus gehörige Tetraeder ist das größte.

Es gibt also ein größtes Tetraeder $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

9. Dieses größte Tetraeder ist ein Tetraeder mit Höhenschnitt und gehört zu allen drei Reihen $R_{01,23}$, $R_{02,31}$, $R_{03,12}$. Jedes Tetraeder einer dieser Reihen, etwa der ersten, ist größer als alle anderen Tetraeder $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, welche mit ihm in den Winkeln an AA_1, A_2A_3 übereinstimmen. Sei a_1 der Winkel von AA_1, so haben wir die Parallelebene $x = \cos a_1$, welche in die Ebene (1.) eine Gerade einschneidet, auf deren innerhalb S gelegenem Teil die Punkte liegen, die jenen Tetraedern zugehören, d. h. deren x, y, z die Kosinus der Flächenwinkel je an der Ecke A sind.

Es existiert mindestens ein Tetraeder mit Höhenschnitt (Nr. 4); es gehört wegen seiner Winkel a_1, a_2, a_3 an AA_1, AA_2, AA_3 zu drei Systemen von Tetraedern bzw. mit diesen Winkeln, unter denen es das größte ist. Also haben wir in (1.) drei in den entsprechenden Punkt zusammenlaufende Geraden, eingeschnitten durch:

$$x = \cos a_1,\ y = \cos a_2,\ z = \cos a_3.$$

Diese drei Ebenen gehören nicht zu demselben Büschel; und da wir natürlich alle α von 0 verschieden annehmen, so ist die Ebene (1.) zu keiner Koordinatenachse parallel, schneidet daher diese drei Ebenen in drei verschiedenen Geraden.

$\bar{\sigma}$ gehöre zu dem Tetraeder mit Höhenschnitt; da dieses je das größte von

---

[1]) *Baltzer*, Elem. II Trig. § 6, 5 und Determinanten a. a. O.; dort steht freilich $+ 2\alpha_2\,\alpha_1 \cos 2s + \cdots$; aber *Baltzer*s Winkel 23, 31, 12, durch die nach außen gezogenen Lote gebildet, sind supplementär zu den inneren Flächenwinkeln a_1, a_2, a_3.

den drei Systemen ist, so muß das Oval $(\bar{\sigma})$ den Übergang bilden von Schneiden zu Nichtschneiden bei *jeder* der drei Geraden; durch Berührung in dem gemeinsamen Punkte kann dies bei allen drei Geraden nicht geschehen, sondern nur wiederum durch Reduktion auf einen Punkt und Verschwinden des Ovals. Das geschieht aber nur bei B_m, denn die Berührung einer Schale mit (1.) war einzig.

Das größte Tetraeder ist das einzige Tetraeder mit Höhenschnitt. Nun, wo das Tetraeder mit Höhenschnitt als einzig unter den Tetraedern $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ erkannt ist, entsteht der Wunsch nach einem direkten Beweise, daß es größer ist als jedes andere Tetraeder mit denselben Flächen, der ja nur möglich ist, wenn es einzig ist.

10. Ein Tetraeder aus der Reihe $R_{01,23}$ hat die Gegenkanten AA_1, A_2A_3 rechtwinklig; also haben A_3 und A_2 dieselbe Normalprojektion auf AA_1, oder:

$$AA_3 \cos \mathfrak{a}_2 = AA_2 \cos \mathfrak{a}_3.$$

Die Multiplikation mit

$$\tfrac{1}{2} AA_1 \sin a_1 \sin a_3 \sin \mathfrak{a}_2 = \tfrac{1}{2} AA_1 \sin a_1 \sin a_2 \sin \mathfrak{a}_3$$

führt zu:

$$\alpha_2 \sin a_3 \sin a_1 \cos \mathfrak{a}_2 = \alpha_3 \sin a_1 \sin a_2 \cos \mathfrak{a}_3$$

oder wegen des zweiten Kosinussatzes:

$$\alpha_2 (\cos a_3 \cos a_1 + \cos a_2) = \alpha_3 (\cos a_1 \cos a_2 + \cos a_3).$$

Wir erhalten *die Fläche 2. Grades:*

$$\alpha_2 (z\,x + y) = \alpha_3 (x\,y + z), \tag{2.}$$

ein einmanteliges Hyperboloid, weil die unendlich ferne Gerade in $x = 0$ auf ihr liegt; und *der innerhalb S gelegene Bogen des Kegelschnitts*, in dem sie (1.) schneidet, entspricht den Tetraedern, von $R_{01,23}$, und denen von $R_{02,31}$, $R_{03,12}$ die Schnitte der analogen Flächen:

$$\alpha_1 (y\,z + x) = \alpha_3 (x\,y + z),\ \alpha_1 (y\,z + x) = \alpha_2 (z\,x + y);$$

sie gehen alle drei durch *die Raumkurve 4. Ordnung:*

$$\alpha_1 (y\,z + x) = \alpha_2 (z\,x + y) = \alpha_3 (x\,y + z), \tag{3.}$$

welche die oben erwähnten vier Ecken $(-1, 1, 1), \ldots$ von Π und den Anfangspunkt enthält.

B_m, der zum einzigen Tetraeder $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ mit Höhenschnitt, dem größten dieser Tetraeder, gehört, ist der einzige innerhalb S gelegene Schnittpunkt dieser Kurve mit (1.) und den drei Kegelschnitt-Bogen gemeinsam.

Aber damit zeigt es sich, daß es sich um *eine Aufgabe 4. Grades* handelt, und *Nichtkonstruierbarkeit* vorliegt [1]).

11. *Baltzer* bestimmt a. a. O. der „Determinanten" einen extremen Wert (nicht den absolut größten) von T oder $\Sigma'^2 = 1 - 2\,x\,y\,z - x^2 - y^2 - z^2$ mit x, y, z, welche (1.) genügen, nach dem üblichen Verfahren der Differentialrechnung und erhält (3.), setzt dann aber ohne weiteres voraus, daß die x, y, z, welche (3.) und (1.) genügen, Kosinus von Flächenwinkeln einer Ecke sind, wozu, wie gesagt, die bloße Bedingung (1.) nicht hinreicht; nur ein kleines Gebiet in dieser Ebene gibt solche Kosinus.

---

[1]) In dem Auszuge aus *Borchardt*s algebraischen Untersuchungen, welche *Baltzer*s Determinanten bringen, wird eine Gleichung 4. Grades gewonnen und *eine* Wurzel derselben nachgewiesen, die „zu einer reellen Lösung des Maximum-Problems führt".

12. Wenn $\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$, ist $c = 0$; die Ebene (1.) geht durch den Anfangspunkt und nimmt also diesen Punkt in sich auf, auf den beim größten Wert 1 von σ oder Σ'^2 die Schale sich reduziert. Σ' ist nur dann 1, wenn die Ecke *dreirechtwinklig* ist. Also hat in diesem Falle das größte Tetraeder oder das einzige Tetraeder mit Höhenschnitt eine solche Ecke an A.

Wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, dann ist die Ebene (1.):

$$x + y + z + \tfrac{1}{2}\frac{\alpha^2 - 3\alpha_1^2}{\alpha_1^2} = 0$$

parallel zur Verbindungsebene der drei Knotenpunkte $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, 1, -1)$ der Fläche $\sigma = 0$, und mit ihr sogar identisch, wenn auch α an der Gleichheit teilnimmt.

Die Raumkurve 4. Ordnung:

$$yz + x = zx + y = xy + z,$$

von den α ganz unabhängig, zerfällt in die drei Kanten und die Körperdiagonale von Π aus der Ecke $(1, 1, 1)$; die drei Flächen sind Ebenenpaare. Jene Kanten liegen außerhalb, und nur die Körperdiagonale dringt in S ein und schneidet (1.) in dem Punkte B_m:

$$x = y = z = \tfrac{1}{6}\frac{3\alpha_1^2 - \alpha^2}{\alpha_1^2};$$

das ist der Kosinus des Flächenwinkels an den Kanten von A bei derjenigen Pyramide, welche in Nr. 1 als größtes Tetraeder gewonnen wird.

Wenn $\alpha_2 = \alpha_3$, ist noch die eine Fläche $zx + y = xy + z$ oder $(y - z)(x - 1) = 0$ ein Ebenenpaar. Die Raumkurve 4. Ordnung zerfällt in zwei Kegelschnitte, in diesen Ebenen gelegen, von denen der in $x = 1$ ganz außerhalb S liegt. Also können nur die Schnitte des anderen mit (1.) in Frage kommen, und die ungerade Anzahl der Tetraeder mit Höhenschnitt kann nur 1 sein.

Für ein Tetraeder mit Höhenschnitt, das zwei gleiche Flächen hat, läßt sich erkennen, daß diese sogar kongruent sein müssen; denn auf der gemeinsamen Grundlinie haben sie gleiche Höhen mit demselben Fußpunkt und denselben durch den Höhenpunkt gemachten Abschnitten. Dazu genügt übrigens, daß die Kante, welche den beiden gleichen Flächen gemeinsam ist, zur Gegenkante rechtwinklig ist. Die beiden anderen Flächen sind gleichschenklig über dieser Gegenkante als Basis.

13. *Kleinste* Tetraeder $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ vom Inhalt 0 gibt es, aber nur *in ausgearteter Form.* Weil in

$$\mathfrak{S} = \sin g_1 g_2 \sin g_2 g_3 \sin g_2$$

(Nr. 5) die Winkel $g_1 g_2$, $g_2 g_3$ untere Grenzen haben, kann nur das $g_2 = 0$ werden; also muß das Vierseit eben sein.

Ecken mit diesem Wert $\Sigma' = 0$ entsprechen den Punkten der Schale S.

Wir wollen uns jedoch dem Ergebnis nähern; das Vierseit sei nur nahezu eben, also hat die Ecke A kleine Kantenwinkel $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$; die aneinander hängenden Seiten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, welche die Flächen α_1, α_2, α_3 abschneiden, sind entfernt. Auf der Grenze vereinigen sich die Kanten in eine Gerade, die Ebenen, senkrecht zu g_1, g_2, g_3, werden Ebenen eines Büschels durch diese Gerade; die Punkte A_1, A_2, A_3

fallen in deren unendlich fernen Punkt zusammen, aber so, daß die Geraden $A_2A_3, \ldots$ die unendlich fernen Geraden der Ebenen sind. Zur unendlich fernen Ebene mit diesem vierten Dreieck ist g normal; aber der Inhalt dieses Dreiecks ist, obwohl die Ecken sich vereinigt haben, nicht 0, sondern α, der Wert, der bei dem Übergang zur Grenze, solange das Dreieck endlich war, fortwährend galt. Der Inhalt des Tetraeders aber ist 0, weil es keinen Raum einschließt und $\Sigma' = 0$.

Es ist Ansichtssache, ob man eine derartige ausgeartete Figur ausschließt oder nicht, ich bin mehr geneigt, es nicht zu tun. Schließt man sie aus, so kann man von nicht erreichbarer unterer Grenze 0 sprechen, der man aber unbegrenzt nahekommen kann, und kann das als ein Beispiel eines nicht vorhandenen Minimums ansehen.

Ich werde an ähnliche von mir gefundene Figuren erinnert, z. B. an die ebenfalls ausgeartete Form der unteren Grenze des Umfangs von Dreiecken, welche einem recht- oder stumpfwinkligen Dreiecke eingeschrieben sind: die doppelte Höhe auf der größten Seite, während beim spitzwinkligen Dreieck sich ein eigentliches Dreieck ergibt, das der Höhenfußpunkte[1]), und weise auch auf die Rolle hin, welche ausgeartete Figuren bei porismatischen Aufgaben spielen[2]).

[1]) Meine „Maxima und Minima" Satz 108, 109.

[2]) Archiv f Mathematik Bd. 24 S. 11.

Zwei Minimalprobleme.

Von Herrn *Rudolf Sturm* in Breslau.

Diese Probleme sind:

1. *In einer Ebene sind zwei Geraden und ein Punkt gegeben, durch ihn extreme Strecken zwischen den Geraden zu ziehen, insbesondere die absolut kleinste innerhalb des Winkels, in dem der Punkt liegt.*

2. *Drei Ebenen und ein Punkt oder eine Gerade sind gegeben; in dem Bündel oder Büschel Ebenen aufzufinden, welche aus den Dreiflachen Dreiecke von extremem Inhalte ausschneiden, insbesondere das absolut kleinste aus derjenigen körperlichen Ecke, innerhalb deren der Punkt liegt.*

Es kann sich nicht um Nullstrecken oder Nulldreiecke handeln, da deren beiderseitige Nachbarn sich nicht in demselben Winkel, derselben Ecke befinden. *Diese Probleme* lassen sich auf den zweiten Grad nicht zurückführen, *sind mit Zirkel und Lineal nicht lösbar.* Soweit solche unlösbaren Aufgaben behandelt werden können, glaube ich die erstere erledigt zu haben; bei der zweiten habe ich Kennzeichen für extreme Werte gefunden; diesen Begriff zu erweitern, halte ich für gut.

I.

1. Die gegebenen Elemente der ersten Aufgabe seien a, b, H, C der Schnitt $a\,b$ und der Winkel, in dem H liegt.

Innerhalb dieses Winkels befinden sich die gesuchten Strecken $A\,B$ durch H in dem zu C supplementären Winkel der Parallelen a', b' durch H zu a, b. Wenn C stumpf ist, bleibt dieser spitze Winkel der Spielraum, in dem extreme Strecken, insbesondere die kürzeste, aufzusuchen sind; wenn C aber spitz ist, verkleinert sich der stumpfe Winkel auf den von ihm eingeschlossenen spitzen Winkel der Senkrechten a'', b'' durch H zu a, b; denn in den anderen Teilen jenes Winkels findet nur Veränderung in dem einen Sinne statt.

Daher schneidet eine solche extreme Strecke ein Dreieck mit spitzen Winkeln an ihr ab.

Für eine Strecke in einem Nebenwinkel von C — dann Differenz von $H\,A$, $H\,B$ — (in den Scheitelwinkel kommt überhaupt keine) — gilt, daß, unabhängig vom Verhalten des Subtrahenden, die Strecke mit dem Minuenden zu- und abnimmt.

Teilt $C\,H$ den Winkel C in zwei spitze Winkel, so findet in den Nebenwinkeln ständiges Wachsen von 0 bis ∞ statt. Ist der eine Teilwinkel stumpf, so kann

in dem am spitzen anliegenden Nebenwinkel ein Maximum und ein Minimum eintreten; dies tritt ersichtlich im Grenzfalle ein, wenn H auf eine der beiden Geraden fällt.

2. *Mit einer extremen Strecke $A\,B$ sind folgende drei Eigenschaften verbunden*, von denen jede sie und die beiden anderen Eigenschaften bewirkt:

α) *Die Senkrechten auf a, b in A, B und auf $A\,B$ in H laufen in einen Punkt zusammen* [1]).

β) *Die Parallelen durch A, B zu b, a und das Lot auf $A\,B$ in H tun dies.*

γ) *H ist symmetrisch, in bezug auf die Mitte von $A\,B$, zum Fußpunkte Q des Lots aus C auf $A\,B$.*

Der Konkurrenzpunkt in α) ist augenblicklicher Drehpunkt für die unendlich kleine Verschiebung, welche die extreme Strecke in die gleiche benachbarte durch H bringt; denn die drei Geraden sind die Normalen der Bahnelemente von A, B, H. Damit ist diese Eigenschaft α) bewiesen, und umgekehrt bewirkt sie zwei unendlich nahe gleiche Strecken durch H, also eine extreme Strecke. Aus ihr folgen β), γ). Demnach ist jede dieser Eigenschaften α), β), γ) *notwendiges und hinreichendes Kennzeichen* für eine extreme Strecke.

3. *Eine extreme Strecke $A\,B$ durch H innerhalb des Winkels C ist absolut kleinste für diesen und als solche einzig.*

Weil die Winkel A, B des Dreiecks ABC spitz sind, fällt die Höhe CQ ins Innere. $A'\,B'$ sei eine zweite Strecke durch H innerhalb C, von der etwa B' zwischen B und C liegt, A' jenseits A; $\delta = \sphericalangle\,(AB, A'B')$. So ist:

$$\frac{AA'}{A'H} = \frac{\sin\delta}{\sin A}, \quad \frac{BB'}{B'H} = \frac{\sin\delta}{\sin B}, \quad \frac{BB'}{AA'} = \frac{B'H}{A'H} \cdot \frac{\sin A}{\sin B};$$

also, wenn $A'\,B'$ unendlich nahe an $A\,B$ ist:

$$\lim \frac{BB'}{AA'} = \frac{BH}{AH} \cdot \frac{\sin A}{\sin B}.$$

Es ist: $\operatorname{cotg} A = \frac{AQ}{CQ} = \frac{BH}{CQ}$, $\operatorname{cotg} B = \frac{AH}{CQ}$ wegen γ); $\frac{\operatorname{cotg} A}{\operatorname{cotg} B} = \frac{BH}{AH}$;

also: $$\lim \frac{BB'}{AA'} = \frac{\cos A}{\cos B}.$$

$A'\,B'$ sei wieder endlich verschieden von AB und $A''B''$ eine dritte Strecke durch H, weiter weggedreht als $A'B'$. Wir haben zwei gleiche Doppelverhältnisse auf CA, CB, (in denen wir alle Strecken absolut nehmen): $\frac{AA''}{AA'} \cdot \frac{CA'}{CA''} = \frac{BB''}{BB'} \cdot \frac{CB'}{CB''}$; nun ist: $CB'' < CB'$, $CA'' > CA'$; also: $\frac{BB''}{BB'} < \frac{AA''}{AA'}$ oder: $\frac{BB''}{AA''} < \frac{BB'}{AA'}$. Mithin verkleinert die Entfernung von $A\,B$ dieses Verhältnis; $\frac{BB'}{AA'}$ ist kleiner als der obige Grenzwert $\frac{\cos A}{\cos B}$, oder: $BB' \cos B < AA' \cos A$. Es seien A_1, B_1 die Normalprojektionen von A', B' auf AB, von denen A_1 jenseits A, B_1 zwischen A und B liegt, so ist $BB_1 < AA_1$ daher: $A_1B_1 > AB$ und: $A'B' > A_1B_1 > AB$.

---

[1]) Meine „Maxima und Minima in der elementaren Geometrie“ (1910) S. 13 Anm. 1.

4. Es werde die Gerade um H gedreht und je der zu H in bezug auf die Mitte der Strecke symmetrische Punkt R konstruiert, der eine durch H gehende Hyperbel beschreibt. Der Fußpunkt Q beschreibt einen Kreis; die Geraden aus H nach den drei Schnittpunkten dieser Kurven, außer H, tragen extreme Strecken [1]).

Oder, das Lot auf $A\,B$ in H erzeugt mit jedem der Lote auf a, b in A, B eine Parabel. Die eine hat a' zur Scheiteltangente, a'' zur Achse und a hat von a' die vierfache Entfernung der Leitlinie, und entsprechend ist die andere beschaffen. Die drei weiteren Schnitte, außer H, führen zu Senkrechten auf extremen Strecken. Man findet leicht, daß, wenn C spitz ist, nur einer dieser Schnitte reell ist; bei stumpfem C können es alle drei sein.

Das Problem ist demnach *3. Grades*; die extremen Strecken sind nicht konstruierbar.

5. Mit dem Probleme hat *die verallgemeinerte Astroide* Zusammenhang: die Kurve 4. Klasse der Geraden, welche in die vier Winkel $a\,b$ Strecken gegebener Länge l schicken; C sei nun der eine spitze Winkel und seine Schenkel die positiven Koordinatenachsen; dann ist *die Tangentialgleichung* der Kurve:

$$l^2\,u^2\,v^2 = u^2 + v^2 - 2\,u\,v\cos C.$$

Die unendlich ferne Gerade ist Doppeltangente mit den absoluten Punkten (unendlich fernen Kreispunkten):

$$u^2 + v^2 - 2\,u\,v\cos C = 0$$

als Berührungspunkten, welche zugleich Rückkehrpunkte sind. Auch a und b sind Doppeltangenten mit A_1, A_2; B_1, B_2, welche von C die Entfernung l haben, als Berührungspunkten. Außerdem schneiden sie in den Punkten A_3, A_4; B_3, B_4, welche je von der anderen Geraden die Entfernung l haben, und diese Lote sind die zugehörigen Tangenten. Bei der Astroide im engeren Sinne ($C = 90^0$) rücken diese Punkte in jene Berührungspunkte, wodurch sie Rückkehrpunkte werden. Jede Tangente trägt, für ihren Berührungspunkt als H, eine extreme Strecke, weil sie der Nachbarstrecke gleich ist; der Berührungspunkt H liegt also symmetrisch zum Fußpunkte Q des Lots aus C in bezug auf die Mitte, daher bei einer innerhalb eines der stumpfen Winkel $a\,b$ gelegenen Strecke jedenfalls innerhalb.

Wegen der drei Doppeltangenten ist die Kurve vom Geschlechte 0, läßt mithin eine *rationale parametrische Darstellung* der Koordinaten der Tangente zu. Dafür ist die Schar der Parabeln zu benutzen, welche die Doppeltangenten und eine vierte Tangente berühren. Auf die letzte noch gemeinsame mit der Parabel veränderliche Tangente geht von dieser der Parameter über. Indem wir $l^2 = 2\,m^2\,(l - \cos C)$ setzen, nehmen wir $u = v = \dfrac{1}{m}$ als jene vierte Tangente und erhalten die parametrische Darstellung:

$$m\,u = \frac{\lambda^2 + c\,\lambda + 1}{\lambda^2 + 2\lambda + c - 1},\quad m\,v = \frac{\lambda^2 + c\,\lambda + 1}{(c-1)\,\lambda^2 + 2\lambda - 1},\quad c = 2\cos C.$$

Wird dies in $u\,x + v\,y + 1 = 0$ eingesetzt, so liefert die verschwindende Dis-

[1]) *J. Sobotka*, Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften Bd. 18 (1913).

kriminante der entstehenden Gleichung 4. Grades in λ *die Punktgleichung* der Astroide:

$$4\{-3c(c+2)(x^2+y^2+2xy\cos C)+(c^2+12)m^2\}^3$$
$$-\{18c(c+2)(x^2+y^2)-9(c+2)(c^2-12)xy+2(c^2-36)m^2\}^2 m^2=0,\ ^1)$$
$$4U^3-V^2m^2=0,$$

einer Kurve *6. Ordnung*. In bezug auf den Parameter m^2 oder l^2 ist sie 3. Grades, so daß 3 aus dem System der Astroiden durch einen Punkt gehen, entsprechend unserem kubischen Problem; die zugehörigen Tangenten tragen extreme Strecken. $U=0$, $V=0$ sind Kegelschnitte um C als Mittelpunkt, und zwar $U=0$ ein reeller Kreis. Aus der Gleichung ist unmittelbar zu entnehmen, daß ihre vier Schnittpunkte *Rückkehrpunkte* der Kurve sind; *sie liegen auf dem Geradenpaar* $r_1 r_2$ des Büschels:

$$8c^3(x^2+y^2)+(432-72c^2-c^4)xy=0.$$

Da es von m^2 unabhängig ist, *enthält es die Rückkehrpunkte aller Kurven des Systems.* Dieselben sind durchweg reell, weil die Geraden r_1, r_2 reell sind und den Kreis je reell schneiden. Die Geraden liegen, durch C gehend, innerhalb der stumpfen Winkel, symmetrisch in bezug auf die Halbierungslinien der Winkel $a\,b$; für ihren spitzen Winkel 2ψ gilt:

$$\cos^2\psi=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}c\cdot\frac{108+c^2}{216+18c^2},$$

$$45^0\geqq\psi\geqq\frac{C}{2}.$$

Die Grenzen vereinigen sich, wenn $C=90^0$.

Der Winkel $r_1 r_2$ im stumpfen Winkel $a\,b$ ist noch stumpf [2]).

6. Die verschiedenen Astroiden sind ähnlich und in bezug auf C ähnlich gelegen. Die Gestalt einer solchen Kurve ist folgende:

Innerhalb des einen stumpfen Winkels $a\,b$ verläuft der Bogen $B_2 A_1$, in B_2, A_1 die b, a berührend, zuletzt schon im Winkel $r_1 a$, dann weiter darin der Bogen $A_1 R_1 A_3$, wo R_1 Rückkehrpunkt auf r_1 ist, nunmehr im spitzen Winkel $A_3 B_3$, im anderen stumpfen Winkel $B_3 R_2 B_1 A_2 R_1' A_4$, im anderen spitzen Winkel $A_4 B_4$ und im ersten stumpfen $B_0 R_2' B_2$.

Die Gestalt des Bogens $B_2 A_1 R_1 A_3$ zeigt, daß durch jeden Punkt innerhalb des einen Winkels $r_1 a$ drei reelle Kurven gehen, und zwar, wenn wir l oder m wachsen lassen, zuerst eine mit ihrem Bogen $R_1 A_3$, die zweite mit $A_1 R_1$ und die dritte mit $B_2 A_1$. Der Punkt schickt durch die 3 Tangenten eine absolut kleinste Strecke in den stumpfen Winkel $a\,b$, in dem er sich befindet, in den benachbarten spitzen Winkel ein Maximum und ein Minimum. Aus einem stumpfwinkligen Dreiecke ist dann zu ersehen, daß dies Maximum kleiner ist als jene absolut kleinste Strecke und das Minimum noch kleiner.

---

[1]) In etwas anderer Form als bei *G. Loria*, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven (1902) S. 224.

[2]) Die Kurve hat außer den Rückkehrpunkten noch 4 imaginäre Doppelpunkte, bei $C=90^0$ die Punkte $(\pm li, \pm li)$.

So werden von den stumpfen Winkeln ab vier Winkel $r_1 a$, $r_2 b$ abgezweigt, durch deren Punkte allein drei extreme Strecken gehen, davon eine, welche absolut kleinste und einzige im stumpfen Winkel ist. Durch einen Punkt eines der spitzen Winkel a b oder eines der noch stumpfen übrigen Teile der stumpfen Winkel geht nur eine extreme Strecke, welche dann absolut kleinste in diesem Winkel ist.

Diese Winkel sind nicht vorhanden, wenn $C = 90^0$ ist.

II.

7. Die in der Einleitung erwähnte Begriffserweiterung erfordert eine mindestens zweifach unendliche Mannigfaltigkeit von Werten; extrem sind dann nicht bloß Maxima und Minima, sondern auch solche Werte, die teils das eine, teils das andere sind und für welche die Bezeichnung: *Maximum — Minimum* wohl richtiger ist, als wie man bisher [1]) sagte: weder Maximum noch Minimum.

Für ein extremes Dreieck in einer Ebene des Bündels des zweiten Problems bedeutet dies: Man zerlege den Bündel in die Büschel, denen die Ebene des Dreiecks gemeinsam ist. Entweder ist das Dreieck in allen Büscheln größer als je die in den beiderseitigen Nachbarebenen des Büschels, oder in allen kleiner, oder die Reihe der Büschel zerfällt in zwei Teile, und in den Büscheln des einen Teils gilt jenes, in denen des anderen dieses.

Wird die fragliche Größe z als Funktion von zwei Veränderlichen x, y graphisch durch eine Fläche dargestellt, als dritte vertikale Koordinate jedes Flächenpunktes, so handelt es sich in allen drei Fällen um einen Punkt mit horizontaler Berührungsebene (Scheitel), in den beiden ersten Fällen um einen elliptischen Punkt (mit positiver Krümmung), im dritten um einen hyperbolischen (mit negativer). Die Flächentheorie behandelt diese gleichartig, nicht gegensätzlich [2]).

Zwei interessante Maxima — Minima will ich am Schlusse vorführen, durch welche, glaube ich, die Aufstellung dieses Begriffs gerechtfertigt wird.

8. Die drei Geraden des Dreiflachs seien a, b, c; O sei der Scheitel und a', a'', ... die Halbstrahlen oder Kanten der acht körperlichen Ecken.

Ein Ebenenbüschel sendet in vier dieser Ecken (endliche) Schnittdreiecke. Wenn $a'\,b'\,c'$ eine von ihnen ist, im Büschel die Ebenen parallel zu a durch O, parallel zu b, zu c in dieser Reihenfolge aufeinander folgen und die Übergänge bilden, so sind die anderen Ecken $a''\,b'\,c'$, $a'\,b''\,c''$, $a'\,b'\,c''$; unter diesen Ecken befinden sich zwei Gegenecken $a''\,b'\,c'$, $a'\,b''\,c''$. Trifft die Büschelachse etwa a', so sind von den vier Ebenen die beiden ersten identisch: $a''\,b'\,c'$ fällt weg; und nur in drei Ecken werden Dreiecke gesandt.

P sei der Scheitel des Bündels und liege in der Ecke $a'\,b'\,c'$. Wir verlegen diese Ecke parallel nach P als $\mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}'\,\mathfrak{c}'$; es gibt Bündelebenen, welche von dieser Ecke ausgeschlossen werden, und solche, welche zwei ihrer Kantenwinkel durchschneiden. Die Gerade PO tritt ins Innere von $a'\,b'\,c'$ und $\mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}'\,\mathfrak{c}'$, jede Ebene durch sie tut also letzteres; unter den ersteren Ebenen gibt es keine, welche durch O geht. Weil die

---

[1]) z. B. *Kiepert*, Differentialrechnung (10. Aufl.) § 163.

[2]) Die Bedingung für: „weder Maximum, noch Minimum“: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 < 0$ ist die für negative Krümmung eines Scheitels der darstellenden Fläche.

Parallelebene durch O zu einer Ebene der ersteren Art von der Ecke $a'b'c'$ ausgeschlossen wird, so treffen alle Ebenen ihrer Stellung a', b', c' oder a'', b'', c'' je nach der Seite, auf der sie liegen, die durch P gehende also a', b', c' und schneidet daher die Ecke $a'b'c'$ in einem Dreiecke; es gibt keine Ebene durch P, welche $a''b''c''$ so schneidet. Eine Bündelebene durchschneide nun die Winkel $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}'\mathfrak{c}'$, während sie von $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ ausgeschlossen wird; daraus folgt, daß sie a', b'', c'' oder a'', b', c' schneidet; beides geschieht diesmal, weil es unter den sich so verhaltenden Ebenen von P durch O gehende gibt, die den Übergang bilden; sie senden also Dreiecke teils in $a'b''c''$, teils in $a''b'c'$.

Ein Bündel sendet daher in 7 der 8 körperlichen Ecken endliche Dreiecke; ausgenommen ist die Gegenecke derjenigen, in der der Scheitel liegt. Diese 7 Ecken stehen über den 7 Teilen einer Ebene des Bündels, in die sie durch die (vollen) Geraden seines Schnittdreiecks geteilt wird.

9. Im Falle *eines Büschels, dessen Achse g etwa c in C trifft*, läßt sich das Problem auf das in I. behandelte zurückführen. In der Tat, es ist, wenn $\mathfrak{C}$ der Schnittpunkt von g mit der Ebene ab ist:

$$2\,ABC = AB \cdot C\mathfrak{C} \sin(AB, g) = AB \cdot C\mathfrak{C} \cos(AB, \varphi),$$

worin die Ebene φ auf g senkrecht steht; folglich wird, da $C\mathfrak{C}$ fest ist, ABC extrem, wenn die Normalprojektion von AB auf φ extrem wird, d. i. eine um $(g, \varphi) = H$ sich drehende Strecke zwischen den Projektionen von a, b. Daher liefert uns β) in Nr. 2 als *notwendiges und hinreichendes Kennzeichen* für ein extremes Dreieck in einer Ebene eines solchen Büschels: *das Zusammenlaufen der Ebenen, die durch AC, BC parallel zu b, a gehen, und der Ebene, die auf ABC längs g senkrecht steht, in eine Gerade.* Das Problem ist in diesem Falle *3. Grades.*

Daraus folgt als *ebensolches* Kennzeichen für ein extremes Dreieck in einer Ebene *eines Bündels T*, das aber auch ein Maximum — Minimum sein kann, daß *das Lot auf ABC im Bündelscheitel P durch den Schnittpunkt der drei Ebenen läuft, welche durch BC, CA, AB parallel zu a, b, c gehen.*

Denn in den Büscheln um PA, PB, PC wird dann das vorige Kennzeichen erfüllt; also hat die darstellende Fläche im entsprechenden Punkte drei horizontale Tangenten und eine horizontale Berührungsebene.

Wird der Ebenenbündel P durchlaufen, so entsteht durch die Lote ein Strahlenbündel und, korrelativ zu ihm, durch die Parallelebenen drei Ebenenbündel um die unendlich fernen Punkte von a, b, c; folglich werden durch die Schnittpunkte entsprechender Elemente in jenem und einem von diesen drei Flächen 2. Grades [1]) erzeugt mit sieben gemeinsamen Punkten außer P, nach denen Lote auf Ebenen mit extremen Dreiecken gehen.

Das Bündelproblem ist also *7. Grades*; durch diesen hohen Grad wird die Weiterverfolgung erschwert. Erwünscht ist, unter diesen Punkten einen reellen nachweisen zu können, der zu einem extremen Dreiecke — vielleicht dem absolut kleinsten — in derjenigen körperlichen Ecke führt, in welcher P sich befindet.

Dieses Kennzeichen gibt nun wiederum dasjenige *für einen Büschel mit be-*

[1]) Meine „Geometrische Verwandtschaften" Bd. II. § 59.

liebiger Achse g: durch den Schnittpunkt der drei Parallelebenen muß die Ebene gehen, welche auf ABC längs g senkrecht steht.

Denn der Fußpunkt P des Lots aus ihm auf ABC fällt dann auf g; daher ist ABC extrem im Bündel P und infolgedessen in allen Büscheln desselben, zu denen die Ebene $A\,B\,C$ gehört; unter ihnen befindet sich der gegebene.

Hier ergeben sich vier projektive Ebenenbüschel, welche vier Konkurrenzpunkte entsprechender Ebenen haben [1]); daher ist dieses Problem *4. Grades.*

Es stimmt demnach — wohl ohne Zusammenhang — der Grad des Problems je mit der Anzahl der Ecken überein, in denen Dreiecke in Ebenen des Bündels oder Büschels liegen.

10. Wir wollen diese Kennzeichen *analytisch* bestätigen. Die positiven Koordinatenachsen seien in a', b', c' gelegt; φ, ψ, ω seien die Koordinatenwinkel $b'c', c'a', a'b'$. Dann findet man leicht die Seiten des Dreiecks und seinen Inhalt I als Funktion der Achsenabschnitte r, s, t der Ebene:

$$4\,I^2 = s^2t^2\sin^2\varphi + t^2r^2\sin^2\psi + r^2s^2\sin^2\omega$$
$$+ 2r^2st\,(\cos\psi\cos\omega - \cos\varphi) + 2rs^2t\,(\cos\omega\cos\varphi - \cos\psi)$$
$$+ 2rst^2\,(\cos\varphi\cos\psi - \cos\omega).$$

Die Koeffizienten, welche mit A, B, C, D, E, F bezeichnet seien, sind die Adjunkten der Elemente der Determinante für das Quadrat des ersten Sinus Σ [2]) der acht körperlichen Ecken:

$$\Sigma^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\omega & \cos\psi \\ \cos\omega & 1 & \cos\varphi \\ \cos\psi & \cos\varphi & 1 \end{vmatrix};$$

die adjungierte Determinante ist: $\begin{vmatrix} A, F, E \\ F, B, D \\ E, D, C \end{vmatrix}$ und z. B.

$$A + F\cos\omega + E\cos\psi = \Sigma^2,\quad A\cos\omega + F + E\cos\varphi = 0, \ldots$$

Im Bündel um $P = (x_0, y_0, z_0)$ gilt: $\frac{x_0}{r} + \frac{y_0}{s} + \frac{z_0}{t} = 1$; also führt die übliche Vorschrift der Differentialrechnung zu:

$$(1.)\qquad Brt^2 + Crs^2 + 2Drst + Es^2t + Fst^2 = \varkappa\frac{x_0}{r^2},$$

$$(2.)\qquad Ast^2 + Cr^2s + Dr^2t + 2Erst + Frt^2 = \varkappa\frac{y_0}{s^2},$$

$$(3.)\qquad As^2t + Br^2t + Dr^2s + Ers^2 + 2Frst = \varkappa\frac{z_0}{t^2}.$$

Die drei Parallelebenen sind:

$$\frac{y}{s} + \frac{z}{t} = 1,\ \frac{z}{t} + \frac{x}{r} = 1,\ \frac{x}{r} + \frac{y}{s} = 1.$$

Für die Richtungscosinus λ, μ, ν der Verbindungslinie von (l, m, n) mit O und jeder Parallelen gilt:

---

[1]) A. a. O. Bd. I Nr. 208.

[2]) *Baltzer*, Elemente der Mathematik Bd. II Sphär. Trig. Nr. 11.

$\lambda : \mu : \nu = (l + m\cos\omega + n\cos\psi) : (l\cos\omega + m + n\cos\varphi) : (l\cos\psi + m\cos\varphi + n)$;
daher:

$$l : m : n = (A\lambda + F\mu + E\nu) : (F\lambda + B\mu + D\nu) : (E\lambda + D\mu + C\nu).$$

Für eine Senkrechte auf der Ebene (r, s, t) ist:

$$\lambda : \mu : \nu = \frac{1}{r} : \frac{1}{s} : \frac{1}{t} = st : tr : rs.$$

Also besteht für das Lot auf (r, s, t) in P die parametrische Darstellung:

$$x = x_0 + \theta(Ast + Ftr + Ers),\quad y = y_0 + \theta(Fst + Btr + Drs),$$
$$z = z_0 + \theta(Est + Dtr + Crs).$$

Und (1.), (2.), (3.) sagen aus, daß der Punkt des Lots mit dem Parameter $\frac{rst}{\varkappa}$ in den drei Parallelebenen liegt.

11. Trifft die Achse eines Büschels die Gerade c, so ist t fest; (1.), (2.) reichen hin und führen zum obigen Kennzeichen für einen derartigen Büschel.

Ferner, (1.), (2.), (3.) erhalten die rechten Seiten $\frac{\varkappa x_0 + \lambda x_0'}{r^2}, \ldots$, wenn $P' = (x_0', y_0', z_0')$ ein zweiter Punkt auf einer beliebigen Büschelachse g ist. Dann sagen die drei Gleichungen aus, daß es auf g einen Punkt gibt, dessen Lot auf (r, s, t) durch den Schnittpunkt der drei Parallelebenen geht; weshalb es die längs g senkrechte Ebene auch tut.

12. Die Formel für I^2 liefert die Tangentialgleichung *der Fläche 6. Klasse der Ebenen, welche Dreiecke von gegebenem Inhalte I aus dem Dreiflache ausschneiden:*

$$4\,I^2\,u^2v^2w^2 = A\,u^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2\,D\,vw + 2\,E\,wu + A\,uv.$$

Sie berührt die unendlich ferne Ebene längs der absoluten Kurve: $A\,u^2 + Bv^2 \cdots = 0$. Jede Berührungsebene ist, für ihren Berührungspunkt als Bündelscheitel P, Träger eines extremen Dreiecks, weil es denen der benachbarten Berührungsebenen, die (bis auf unendlich kleine Größen 2. Ordnung) auch zum Bündel gehörig anzusehen sind, gleich ist; und zwar ist es ein Maximum oder Minimum, wenn der Punkt positive Krümmung hat und die konkave oder konvexe Seite dem Scheitel O zugewandt ist, weil es dann zu einer anderen Bündelebene eine von O weitere oder an O nähere parallele Tangentialebene gibt, die ein gleiches Dreieck trägt, und jene also ein kleineres oder größeres. Bei einem Punkte mit negativer Krümmung handelt es sich um ein Maximum — Minimum.

13. Als ich das größte Tetraeder bei inhaltlich gegebenen Seitenflächen behandelte [1]), erzielte ich durch Ersetzung des zweidimensionalen Inhalts einer ebenen Fläche durch eine zur Ebene senkrechte Strecke $O\,S$ von gleicher Maßzahl eine Vereinfachung. Bei unsern aus einem Dreiflache ausgeschnittenen Dreiecken führt das zu *einer zweieindeutigen Verwandtschaft* [2]), in welcher jeder Ebene ein Punkt, jedem Punkte zwei (in bezug auf O symmetrische) Ebenen zugeordnet sind. Die Koordinaten von S sind:

---

[1]) Dieses Journal, Bd. 152. S. 90 ff.

[2]) Meine „Geometrische Verwandtschaften“ Bd IV. § 141.

$$x = \frac{1}{2\Sigma}(Ast + Ftr + Ers),\ y = \frac{1}{2\Sigma}(Fst + Btr + Drs),$$

$$z = \frac{1}{2\Sigma}(Est + Dtr + Crs).$$

Einem Ebenenbündel um (x_0, y_0, z_0) *entspricht, eineindeutig, eine Fläche 3. Ordnung mit O als uniplanarem Doppelpunkte:*

$$\xi\eta\zeta = (x_0\xi + y_0\eta + z_0\zeta)^2,$$

worin:

$$\xi = \frac{1}{2\Sigma}(x + y\cos\omega + z\cos\psi),\ \ \eta = \frac{1}{2\Sigma}(x\cos\omega + y + z\cos\varphi),$$

$$\zeta = \frac{1}{2\Sigma}(x\cos\psi + y\cos\varphi + z),$$

einem Büschel, ebenfalls eineindeutig, eine Kurve 3. Ordnung in der zur Büschelachse senkrechten Ebene durch *O* mit diesem Punkte als Rückkehrpunkt.

Die extremen Werte von Inhalten ausgeschnittener Dreiecke werden durch Normalen aus *O* an die Fläche oder Kurve geliefert; aber insbesondere die hohe Singularität des Punktes *O* auf der kubischen Fläche scheint, soviel ich sehe, hier eine Vereinfachung durch diese Umformung auszuschließen.

14. Ich ziehe vor, über Beispiele eines *Maximum — Minimums*, auf die ich in Nr. 7 hinwies, noch einige Mitteilungen zu machen; ich fand sie, als ich extreme Werte für *die Potenzen der Involutionen konjugierter Elemente* in bezug auf einen Kegelschnitt aufsuchte.

Bei denen konjugierter Punkte gibt die Nebenachse ein Maximum — Minimum. Sie zerlegt das Geradenfeld der Ebene in die Strahlenbüschel, zu denen sie gehört. Die beiden Punkten S_1, S_2 auf ihr, für welche $y^2 = c^2$ — also analog den Brennpunkten auf der Hauptachse — sind hier wertvoll. *Die Potenz* (Quadrat der halben Sehne) *auf ihr ist in jedem der Büschel extrem, und zwar bei der Ellipse ein Minimum in denen, deren Scheitel zwischen* S_1, S_2 *liegen, ein Maximum in den anderen, bei der Hyperbel umgekehrt*, dort positiv, hier negativ.

Die Hauptachse dagegen ist allen Büscheln bei der Ellipse Maximum, bei der Hyperbel Minimum.

15. Noch interessanter ist es bei *den Involutionen konjugierter Strahlen*, bei denen jedoch nicht *die beiden einzelnen zueinander reziproken Potenzen* ($\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\varphi$, $\mathrm{cotg}^2\frac{1}{2}\varphi$, wenn φ der Winkel der Tangenten ist) betrachtet werden, sondern *ihre Summe*, die sich ebenso in bezug auf Wachsen und Abnehmen verhält wie die unechte Potenz. Für $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ (Achsengleichung) ist:

$$p + \frac{1}{p} = 2 + \frac{(x^2 + y^2 - a - b)^2}{bx^2 + ay^2 - ab}.$$

Bei der Ellipse führt der Mittelpunkt zu einem Maximum — Minimum, einem Scheitel mit negativer Krümmung auf der nicht uninteressanten darstellenden Fläche 4. Ordnung.

Das Punktfeld wird in die Punktreihen auf den Durchmessern zerlegt. Die gleichen konjugierten Durchmesser d', d'' teilen den Büschel in die beiden Teile mit der Haupt- und Nebenachse. *Auf denen des ersten Teils ist die Potenzensumme*

im Mittelpunkte $-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$ *ein Minimum, auf denen des anderen ein Maximum*; alle haben zwei Minima + 2 auf dem Direktorkreise $x^2+y^2=a+b$, die ersteren noch zwei Maxima in inneren Punkten, welche auf der Hauptachse in den Brennpunkten liegen (— 2), sich dem Mittelpunkte nähern und auf d', d'' in ihn fallen.

Bei der Hyperbel ($b<0$) liegt im Mittelpunkte ein (positives) Maximum oder Minimum vor, je nachdem $\frac{a}{b}$ unecht oder echt ist; im letzteren Falle ist es an die Stelle der beiden (wegen des reell-imaginär gewordenen Direktorkreises) nicht mehr vorhandenen Minima + 2 getreten, so daß das von Werten von $p+\frac{1}{p}$ nicht erfüllte Intervall von — 2 bis + 2 sich nach oben etwas erweitert hat. Wir haben hier wieder *eine Umgestaltung einer Extremfigur*, für welche ich schon mehrfache Beispiele zusammengebracht habe [1]). *Das Minimum + 2 in allen Punkten des Direktorkreises, wenn* $\frac{a}{b}$ *unecht ist, gelangt in den Mittelpunkt, wenn* $\frac{a}{b}=-1$, *der Kreis sich auf diesen Punkt zusammengezogen hat, und bleibt, wenn* $\frac{a}{b}$ *echt geworden ist, in ihm:* mit größerem positiven Wert $-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$. Die ins Innere gehenden Durchmesser enthalten dort noch zwei Punkte mit maximaler Potenzensumme, auf der Hauptachse die Brennpunkte; sie entfernen sich ins Unendliche.

[1]) Meine „Maxima und Minima in der elementaren Geometrie“ (1910) S. 60, 61, 63, 64, 80, 82, 91, 95; Archiv der Mathematik (3) Bd. 16 S. 151, Bd 21 S. 98.

Über die Darstellung analytischer Funktionen durch bestimmte Integrale.

Von Herrn *Alfred Kienast* in Küsnacht (Zürich).

Die von *Weierstraß* eingeführte Definition der analytischen Funktion durch eine konvergierende Potenzreihe $\mathfrak{P}(x|a) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{c_\varkappa}{\varkappa!}(x-a)^\varkappa$ und das System ihrer Fortsetzungen führt naturgemäß zu der Aufgabe, von diesen speziellen definierenden Grenzausdrücken aus überzugehen zu neuen arithmetischen Ausdrücken, für deren Auswahl und Bildung verschiedene Gesichtspunkte zugrundegelegt wurden. So fordert ein klassisches Problem [1]) von dem neuen Ausdrucke, daß er die Funktion im größtmöglichen Gebiet, dem Hauptstern, darstellen soll, während über den Bau des Ausdruckes keine Vorschrift gemacht wird.

In dieser Arbeit entwickle ich ein Verfahren, durch das verschiedenartige Grenzausdrücke übergeführt werden in die Form eines bestimmten Integrals. Hier ist also die analytische Form des neuen Grenzausdruckes das bestimmende Element. Dabei ergeben sich auch Beziehungen zu dem erwähnten Problem.

Eine Kategorie von Grenzausdrücken, auf welche die Methode anwendbar ist, verdient besondere Erwähnung. Dies sind die asymptotischen Reihen, deren Definition *Poincaré* aufgestellt hat. Eine asymptotische Reihe stellt eine Funktion dar, wenn die Variable sich geradlinig einer Singularität nähert, in deren Umgebung die Funktion sich irregulär verhält. So ist man heute dahin gelangt, dem monogenen System von Potenzreihen die asymptotischen Entwicklungen hinzuzufügen, falls solche für die in Frage kommende Funktion vorhanden sind.

Dazu berechtigt der folgende Satz, dessen Beweis unmittelbar aus den von *Poincaré* aufgestellten Eigenschaften der asymptotischen Reihen sich ergibt.

Satz [2]*):* Wenn zwischen n konvergenten Potenzreihen $f_\nu = \mathfrak{P}_\nu(x|a)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ eine rationale Beziehung besteht $R(f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0$, dann besteht sie nicht nur zwischen je n zusammengehörigen Fortsetzungen, sondern auch für zusammengehörige asymptotische Entwicklungen, welche die f_ν darstellen, wenn die Variable x geradlinig sich einer irregulären singulären Stelle nähert.

---

[1]) *G. Mittag-Leffler,* Acta Math. 23. S. 45.

[2]) *G. Mittag-Leffler,* Atti Congress. Rom. 1908; Bull. amer. Math. Soc. Ser. 2. Vol. 14. (1908) pag. 485.

Dieser Satz läßt Umkehrung zu, die aber nicht mehr eindeutig formuliert werden kann.

Satz: Wenn zwischen n Entwicklungen $\mathfrak{A}_\nu(x)$, die n analytische Funktionen f_ν asymptotisch darstellen, falls x sich geradlinig der Stelle ∞ nähert, eine rationale Beziehung $R[\mathfrak{A}_1(x), \mathfrak{A}_2(x), \ldots, \mathfrak{A}_n(x)] = 0$ besteht, dann besteht diese auch zwischen den n analytischen Funktionen $f_\nu + g_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, wobei die asymptotische Entwicklung jeder der analytischen Funktionen g_ν Null ist, wenn x sich auf dem eben genannten Wege der Stelle ∞ nähert.

Die Einführung der asymptotischen Reihen bewirkt eine Erweiterung der Aufgabe der analytischen Darstellung. Sie zerfällt in zwei Teile:

1. Man bestimme die asymptotischen Entwicklungen, die zu einer gegebenen analytischen Funktion gehören.

2. Zu einer vorgelegten asymptotischen Reihe bestimme man eine der analytischen Funktionen, die sie darstellt.

Untersuchungen, die den ersten Teil betreffen, liegen den Zielen dieser Arbeit fern. Die Aufgabe des zweiten Teils ist wohl zum ersten Male von *Stieltjes* [1]) betrachtet worden und bildet ein wichtiges Anwendungsgebiet der hier eingeführten Methode.

Das bestimmte Integral besitzt vor anderen analytischen Darstellungsmitteln bemerkenswerte Vorzüge, von denen in der Literatur ausgiebiger Gebrauch gemacht worden ist und die eine genügende Veranlassung bilden, es als Ziel einer Umformungsmethode hinzustellen.

Ausgangspunkt dieser Methode ist eine lineare, nicht homogene Differentialgleichung $P(y) = \varphi(x)$, deren allgemeines Integral sich darstellen läßt durch:

$$y = \sum_{\lambda=1}^{n} A_\lambda y_\lambda(x) + V(x),$$

wenn $V(x)$ irgend ein partikuläres Integral und $y_\lambda(x)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$ ein Fundamentalsystem der reduzierten Gleichung bezeichnen. $V(x)$ läßt sich in gewissen Fällen durch eine konvergierende Reihe darstellen und in anderen Fällen durch eine asymptotische Reihe. Die dabei geltenden Sätze sind in einer früheren Arbeit [2]) bewiesen. Andererseits kann man die Methode der Variation der Konstanten oder einen Satz von *Cauchy* verwenden, um eine partikuläre Lösung in der Form eines bestimmten Integrals anzugeben [3]).

Sei, der folgenden Anwendungen wegen,

(1.) $$xy' - x\,p(x)\,y = x^\alpha\,\varphi(x)$$

die Differentialgleichung und $\int_{x_0}^{x} W(x,t)\,dt$ die partikuläre Lösung, dann muß es möglich sein, die Konstante C so zu bestimmen, daß

$$C y_1(x) + V(x) = \int_{x_0}^{x} W(x,t)\,dt.$$

---

[1]) Ann. Fac. Toulouse VIII & IX; 1894, 1895.

[2]) Vgl. Vierteljahresschrift d. Naturf. Ges. Zürich Jahrg. 61 (1916) S. 684 § 2, § 3.

[3]) Vgl. Vierteljahresschrift 61. § 4, § 5.

Diese Gleichung läßt sich sehr einfach gewinnen aus (1.) und

$$x y_1' - x\, p(x)\, y_1 = 0,$$

woraus

$$x\,[y_1 \cdot y' - y \cdot y_1'] = x^a \cdot y_1 \cdot \varphi(x)$$

oder

$$(2.) \qquad \left| \frac{V(x)}{y_1(x)} \right|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} \frac{x^{a-1}\, \varphi(x)}{y_1(x)}\, dx.$$

Denkt man sich $V(x)$ in (2.) ersetzt durch die soeben genannte Reihendarstellung, so hat man eine Verbindung hergestellt zwischen den beiden Darstellungsarten des partikulären Integrals. Der formale Bau der Formeln, die sich aus dieser Verbindung ergeben, ist bestimmt durch die zugrundegelegte Differentialgleichung (1.); ich nenne sie daher verbindende Differentialgleichung.

Die Formel (2.) gilt, wenn x_0, x zwei beliebige Stellen im Regularitätsbereich der in ihr enthaltenen Funktionen sind. Aber sie ist von besonderem Interesse, wenn eine oder beide Grenzen mit singulären Stellen von $y_1(x)$ zusammenfallen können. Handelt es sich um eine reguläre singuläre Stelle, so nimmt man die Differentialgleichung in der Normalform, so daß die Singularität in $x = 0$ liegt, und führt den Grenzübergang $\lim x_0 = 0$ aus. Ist die Singularität irregulär, so verlegt man sie nach $x = \infty$, faßt den Differentialausdruck auf als Spezialfall von $P(y) = \sum_{i=0}^{n} x^{s(n-i)}\, p_i(x)\, y^{(i)}$ und führt dann $\lim x_0 = +\infty$ durch. Die Betrachtungen für die obere Grenze x sind jedesmal besonders zu behandeln.

Die Aufstellung der Formel (2.) [bzw. einer analogen [1]) für eine verbindende Differentialgleichung n-ter Ordnung] bildet den ersten Schritt bei der Durchführung der Methode. Der folgende Schritt besteht in der Einführung eines Parameters und endlich läßt sich die Freiheit in der Wahl des Integrationsweges $x_0 \ldots x$ ausnutzen. Es liegt in der Natur dieser beiden letzten Bestandteile des Verfahrens, daß sie sich besser an speziellen Fällen übersehen lassen, als an einer „allgemeinen" Formel. Ich führe jetzt das Verfahren durch in zwei Fällen, die wegen der in ihnen vorkommenden Verwendung asymptotischer Reihen gewählt wurden.

I.

Aus der Gleichung

$$(3.) \qquad x y' - a x y = x^a\, \varphi(x)$$

folgt

$$(4.) \qquad \left| e^{-ax}\, V(x) \right|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} e^{-at}\, t^{a-1}\, \varphi(t)\, dt.$$

Wenn α weder Null noch eine ganze negative Zahl und $\varphi(x)$ eine in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Funktion ist, dann besitzt (3.) eine partikuläre Lösung $V(x)$, die sich darstellen läßt durch die konvergierende Reihe [2]) $V(x) = \sum_{0}^{\infty} A_\varkappa\, x^{\varkappa+a}$ und umgekehrt. Deshalb folgt aus (3.):

$$x^{a-1}\, \varphi(x) = \sum_{0}^{\infty} D_n\, x^{n+a-1} = \sum_{0}^{\infty} [(n+\alpha)\, A_n - a\, A_{n-1}]\, x^{n+a-1},$$

also

$$D_n = (n+\alpha)\, A_n - a\, A_{n-1}.$$

---

[1]) Vgl. Formel (77.) Vierteljahresschrift 61 (1916) S. 719.

[2]) Spezialfall des Satzes auf S. 701 der Vierteljahresschrift 61.

Hier wird der erwähnte Parameter eingeführt durch die Annahmen, welche nicht die einzige Möglichkeit bilden,

$$A_n = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}\, z^\lambda,$$

$$a_{n\lambda} = 0, \quad \text{wenn } n > \lambda,$$

$$a_{n\lambda} = \frac{a^n\, a_\lambda}{(\alpha+1)\,(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}, \text{ wenn } n \gtreqless \lambda,$$

so daß sich ergibt:

$$D_0 = \alpha A_0, \ldots, D_n = -\frac{a_{n-1}\, a^n \cdot z^{n-1}}{(\alpha+1)\,(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)},$$

wodurch (4.) übergeht in

$$\text{(5.)} \quad \left| e^{-ax}\,(ax)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{\Pi(\alpha+n)} \left[\sum_{\lambda=n}^{\infty} a_\lambda\, z^\lambda\right]\right|_{x_0}^{x}$$
$$= \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda z^\lambda\right) \frac{1}{\Pi(\alpha-1)} \int_{x_0}^{x} e^{-at}\,(at)^{\alpha-1}\, d(at) - \int_{x_0}^{x} e^{-at}\,(at)^\alpha \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\,(azt)^n}{\Pi(\alpha+n)}\right\} d(at).$$

Diese Gleichung ist gültig für alle Werte der a_λ, und von z, für die $\sum_{n=0}^{\infty} D_n\, x^n$ eine Potenzreihe von x ist, die einen nicht verschwindenden Konvergenzradius besitzt.

Ich betrachte hier [1]) den Fall, daß $\sum_0^\infty a_\lambda\, z^{-\lambda}$ eine Reihe ist, die die Funktion $f(z)$ asymptotisch darstellt. Gemäß der Definition, die *Poincaré* eingeführt hat, besteht für jede ganze Zahl m die Gleichung

$$\lim_{z=\infty} z^m \left[f(z) - \sum_0^m a_\lambda\, z^{-\lambda}\right] = 0.$$

Da der endlichen Summe wegen

$$\lim_{x=\infty} e^{-ax}\,(ax)^\alpha \sum_{n=0}^{m} \frac{(ax)^n}{\Pi(\alpha+n)} \left[\sum_{\lambda=n}^{m} a_\lambda\, z^{-\lambda}\right] = 0,$$

wenn $-\frac{\pi}{2} < \arg(ax) < \frac{\pi}{2}$, so folgt aus (5.):

$$z^m \left[f(z) - \sum_{\lambda=0}^{m} a_\lambda\, z^{-\lambda}\right]$$
$$= z^m \left\{f(z) - [e^{2\pi i\alpha} - 1]^{-1} \int_C e^{-ax}\,(ax)^\alpha \left[\sum_{\lambda=0}^{m} \frac{a_\lambda}{\Pi(\alpha+\lambda)} \left(\frac{ax}{z}\right)^\lambda\right] d(ax)\right\}.$$

Zur Vereinfachung sei $a = 1$ und die Integrationsschleife C verlaufe von $+\infty$ aus längs der reellen positiven Achse der x-Ebene, was mit den Bedingungen in Einklang steht. α ist keine ganze positive Zahl, weil in diesem Falle das Integral $\equiv 0$. Dann ist für jene ganze Zahl m:

$$\lim_{z=\infty} z^m \left\{f(z) - \frac{1}{e^{2\pi i\alpha} - 1} \int_C e^{-x}\, x^\alpha \left[\sum_{n=0}^{m} \frac{a_n}{\Pi(\alpha+n)} \left(\frac{x}{z}\right)^n\right] dx\right\} = 0.$$

---

[1]) Fälle, in denen $\Sigma a_\lambda\, z^\lambda$ eine Reihe mit nicht verschwindendem Konvergenzradius ist, wurden in L'enseignement math. XIX pag. 129 und Vierteljahresschrift 62 (1917) S. 59 verfolgt; außerdem ist die Methode dargestellt und verwendet in „Untersuchungen über die Lösungen der Differentialgleichung $xy'' + (\gamma - x)\,y' - \beta y = 0$". Denkschriften der Schweiz. Naturf. Ges. Bd. LVII Abh. 2. (1921) §§ 15—20.

Die Reihe $\sum_0^\infty \frac{a_n}{\Pi(\alpha+n)} u^n = g(u)$ kann konvergieren oder die Funktion $g(u)$ asymptotisch darstellen. In beiden Fällen gibt es Beispiele, in denen das Integral

$$(6.) \qquad K(z) = [e^{2\pi i a} - 1]^{-1} \int_C e^{-x} x^a g\left(\frac{x}{z}\right) dx$$

konvergiert. Nimmt man daher die weitere Voraussetzung auf, daß $K(z)$ konvergiert für den speziellen endlichen Wert z_0, und bezeichnet man

$$R_m(u) = \sum_{m+1}^\infty \frac{a_n}{\Pi(\alpha+n)} u^n,$$

so folgt: $$\lim_{z=\infty} z^m [f(z) - K(z)] = \lim_{z=\infty} \frac{z^m}{1 - e^{2\pi i a}} \int_C e^{-x} x^a R_m\left(\frac{x}{z}\right) dx.$$

Die weiter unten erwähnten, bekannten Resultate hinsichtlich des Konvergenzgebietes eines Integrals wie $K(z)$ zeigen, daß es keine Einschränkung bedeutet, anzunehmen, daß z_0 auf demselben Halbstrahle liegt, auf dem z ins Unendliche geht, also im vorliegenden Falle, daß z_0 reell positiv ist. Dann kann man beweisen, daß

$$(7.) \qquad \lim_{z=\infty} z^m [1 - e^{2\pi i a}]^{-1} \int_C e^{-x} x^a R_m\left(\frac{x}{z}\right) dx = 0,$$

sodaß $$\lim_{z=\infty} z^m [f(z) - K(z)] = 0.$$

Dies bedeutet, daß $K(z)$ die Funktion $f(z)$ asymptotisch darstellt für reelle positive z, woraus folgt:

$$(8.) \qquad f(z) = K(z) + E(z),$$

wo $E(z)$ eine Funktion bezeichnet, deren asymptotische Darstellung Null ist.

Die Behauptung (7.) soll jetzt bewiesen werden.

Voraussetzungen: $\sum_0^\infty \frac{a_n}{\Pi(\alpha+n)} u^n = g(u)$ besitze den Konvergenzradius $r > 0$; das Integral $\int_C e^{-x} x^a g\left(\frac{x}{z_0}\right) dx$ sei konvergent; z_0 sei reell positiv.

Beweis: z sei ein beliebiger, aber fester positiver Wert. Das Integral wird zerlegt in 3 Teile dadurch, daß man den Integrationsweg C zerlegt: in die Strecke $+\infty$ bis zy_0, wo $y_0 < \varrho < r$, den Kreis C_1 von zy_0 mit $x = 0$ als Mittelpunkt im positiven Sinne durchlaufen bis wieder nach zy_0, und die Strecke zy_0 nach $+\infty$. Indem man die beiden über die geradlinigen Stücke erstreckten Teile zusammenfaßt, ergibt sich:

$$z^m \int_C e^{-x} x^a R_m\left(\frac{x}{z}\right) dx = z^m \int_{C_1} e^{-x} x^a R_m\left(\frac{x}{z}\right) dx + z^m [e^{2\pi i a} - 1] \int_{zy_0}^\infty e^{-x} x^a R_m\left(\frac{x}{z}\right) dx.$$

Da $R_m\left(\frac{x}{z}\right)$ im Kreise C_1 regulär ist, kann im ersten Integrale der Integrationsweg C_1 reduziert werden auf die längs der reellen Axe verlaufende, von zy_0 aus um $x = 0$ herumgelegte Schleife l. Zur Abschätzung dieses Integrals ergibt der Satz von *Cauchy*:

$$\left|\frac{a_n}{\Pi(\alpha+n)}\right| < g\,\varrho^{-n},$$

wenn g das Maximum der Funktion $|g(u)|$ auf dem Kreise mit dem Radius ϱ bedeutet. Somit

$$|R_m(y)| \leqq g \sum_{m+1}^{\infty} \left(\frac{|y|}{\varrho}\right)^n \leqq g\, \varrho^{-m-1}\, |y|^{m+1} \left(1 - \frac{|y|}{\varrho}\right)^{-1},$$

wobei y eine beliebige Stelle auf oder innerhalb C_1 ist.

Zieht man in Betracht, daß auf l $0 \leqq \arg x \leqq 2\pi$ und somit $|x^\alpha| < D\,|x|^\beta$, wo β den reellen Teil von α bezeichnet und D mit α eine endliche Größe ist, so erhält man:

$$\left| z^m \int_{C_1} e^{-x}\, x^\alpha\, R_m\left(\frac{x}{z}\right) dx \right| < g \cdot D \cdot \varrho^{-m-1}\, z^{-1}\, N^{-1} \int_l |e^{-x}|\, |x|^{\beta+m+1}\, |dx|,$$

wobei N das Minimum von $1 - \dfrac{|x|}{z \cdot \varrho}$ bezeichnet, welches eine von Null verschiedene Größe ist, da $|x| < z \cdot \varrho$ für jedes x auf l.

Mit Hilfe des Integrals, das $\Pi\,(\beta + m + 1)$ darstellt, ergibt sich endlich:

$$\left| z_m \int_{C_1} e^{-x}\, x^\alpha\, R_m\left(\frac{x}{z}\right) dx \right| < G\, \frac{1}{z},$$

wo G eine von z unabhängige endliche Größe bedeutet.

Im zweiten Integral führt man die Substitution $x = z \cdot y$ aus und ersetzt $R_m(y)$ durch seinen Wert; das gibt:

$$J(z) = z^{m+\alpha+1}\, [e^{2\pi i \alpha} - 1] \int_{y_0}^{\infty} e^{-zy}\, y^\alpha \left\{ g(y) - \sum_0^m \frac{a_\lambda}{\Pi\,(\alpha + \lambda)}\, y^\lambda \right\} dy.$$

Nach Voraussetzung konvergiert $\int_{y_0}^{\infty} e^{-z_0 y}\, y^\alpha\, g(y)\, dy$; daher, und weil $\sum_0^m \dfrac{a_\lambda}{\Pi\,(\alpha + \lambda)}\, y^\lambda$ ein Polynom ist, konvergiert auch $J(z_0)$. Dies trifft auch noch zu für jedes der Integrale, die man erhält, wenn

$$y^\alpha \left[g(y) - \sum_0^m \frac{a_\lambda}{\Pi(\alpha + \lambda)}\, y^\lambda \right] = g_1(y) + i\, g_2(y)$$

in reellen und imaginären Teil zerlegt wird. Dann kommen in jedem der Integrale

$$F_\lambda(z_0, y) = \int_{y_0}^{y} e^{-z_0 y}\, g_\lambda(y)\, dy \qquad (\lambda = 1, 2)$$

nur noch reelle Größen vor, und $F_\lambda(z_0, y)$ sind daher im Intervall $y_0 \leqq y \leqq +\infty$ endliche und stetige Funktionen. Nun ist

$$\int_{y_0}^{\infty} e^{-zy}\, g_\lambda(y)\, dy = \int_{y_0}^{\infty} e^{-y(z-z_0)}\, d\, F_\lambda(z_0, y) = |e^{-y(z-z_0)}\, F_\lambda(z_0, y)|_{y_0}^{\infty} - \int_{y_0}^{\infty} F_\lambda(z_0, y)\, d\,[e^{-y(z-z_0)}]$$

$$= F_\lambda(z_0, \xi_\lambda) \int_{y_0}^{\infty} d\, e^{-y(z-z_0)} = F_\lambda(z_0, \xi_\lambda)\, e^{-y(z-z_0)}$$

unter Verwendung von partieller Integration und des ersten Mittelwertsatzes. ξ_1, ξ_2 sind nicht näher bestimmte, zwischen y_0 und ∞ liegende Werte, also

$$[F_1(z_0, \xi_1) + F_2(z_0, \xi_2)]\, e^{y_0 z_0} = A$$

eine endliche, von z unabhängige Konstante.

Man hat damit gefunden:

$$\left| z^m\, [1 - e^{2\pi i \alpha}]^{-1} \int_C e^{-x}\, x^\alpha\, R_m\left(\frac{x}{z}\right) dx \right| < G\, |1 - e^{2\pi i \alpha}|^{-1}\, z^{-1} + A\, z^{m+\alpha+1}\, e^{-y_0 z},$$

wo y_0 eine positive, G und A endliche, von z unabhängige Größen sind; hieraus folgt für $\lim z = \infty$ die Behauptung.

Dieselben Überlegungen gelten, wenn statt des Integrationsweges C die Strecke $+\infty \cdots 0$ genommen wird, wobei wegen der linken Seite in (5.) $R(\alpha) > 0$ erfüllt sein muß. Man findet dann

$$(9.) \qquad \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda z^{-\lambda} = \int_0^\infty e^{-t} t^\alpha \left\{ \sum_0^\infty \frac{a_n}{\Pi(\alpha+n)} \left(\frac{t}{z}\right)^n \right\} dt + E(z) .$$

Setzt man nun weiter voraus, die Funktion $g(v) = g_1(v) + g_2(v)$ lasse sich zerlegen in eine ganze Funktion $g_1(v)$ und eine Funktion $g_2(v)$, die in der Umgebung von $v = \infty$ sich verhält wie v^β multipliziert mit einer regulären Funktion von v. Infolge der früheren Voraussetzung konvergiert das Integral $K_1 = \int_0^\infty e^{-t} t^\alpha g_1(t z_0^{-1})\, dt$. Derartige Integrale hat Herr *Phragmén* [1]) untersucht und gezeigt, daß K_1 für die Variable $\zeta = \frac{1}{z}$ eine analytische Funktion darstellt, und daß K_1 konvergiert, wenn ζ innerhalb des „polygone de sommabilité" liegt, d. h., wenn z außerhalb der zu diesem Polygon inversen Figur liegt. $g_2(v)$ ist in der Umgebung von 0 regulär und die Singularität in ∞ verhindert die Konvergenz des Integrals $K_2 = \int_0^\infty e^{-t} t^\alpha g_2(t z^{-1})\, dt$ nicht. Liegt auf dem Strahle mit $\arg v = \psi_1$ in endlicher Entfernung keine Singularität von $g_2(v)$, so konvergiert K_2 für jeden Wert von z mit $\arg z = -\psi_1 + \arg a$, d. h. für alle z auf einem Strahle $0 \cdots \infty$. Liegt auf dem Strahle $\arg v = \psi_2$ eine Singularität von $g_2(v)$, so kann diese die Konvergenz von K_2 zerstören. Dann konvergiert K_2 für kein z mit $\arg z = -\psi_2 + \arg a$. Somit konvergiert K_2 in gewissen Sektoren der z-Ebene.

Ist speziell $g_2(v)$ eine rationale Funktion ohne ganzen Teil, so konvergiert K_2 in der ganzen z-Ebene mit Ausnahme einzelner Strahlen $0 \cdots \infty$, die eine endliche Anzahl von Sektoren abgrenzen. Im allgemeinen werden in verschiedenen Sektoren Zweige verschiedener analytischer Funktionen dargestellt.

Mit Hilfe dieser Ergebnisse lassen sich die Konvergenzgebiete des Integrals $K(z)$ und des Integrals in (9.) zusammensetzen aus denjenigen Gebieten der z-Ebene, in denen die Integrale konvergieren, in die sie zerlegt worden sind.

II.

Macht man die Voraussetzung, daß in derselben verbindenden Differentialgleichung

$$(10.) \qquad y' - ay = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} D_\varkappa x^{-\varkappa-\sigma}$$

die rechte Seite in der Umgebung von $x = \infty$ eine reguläre Funktion darstellt, oder daß sie eine Funktion $\psi(x)$ asymptotisch darstellt, während

$$\Sigma(-\varkappa-\sigma) D_\varkappa x^{-\varkappa-\sigma-1}$$

die Funktion $\psi'(x)$ asymptotisch darstellt, dann folgt aus (2.):

---

[1]) C. R., 10 juin 1901, vgl. *Mittag-Leffler*, Acta Math. 29 (1905), S. 107.

$$(11.) \qquad |e^{-ax} V(x)|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} e^{-at} \cdot t^{-\sigma} \left\{ \sum_{x=0}^{\infty} D_x t^{-x} \right\} dt ,$$

und es gibt[1]) eine partikuläre Lösung $V(x)$, die durch die Reihe $V(x) = \sum_{x=0}^{\infty} A_x x^{-x-\sigma}$ asymptotisch dargestellt wird. Somit besteht die Beziehung

$$- D_x = a A_x + (x + \sigma - 1) A_{x-1}.$$

Der Parameter wird, wie in I., eingeführt durch

$$A_x = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda} z^{\lambda},$$

$$a_{n\lambda} = 0, \quad \text{wenn } n > \lambda,$$

$$a_{n\lambda} = \frac{\sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+n-1)}{(-1)^x a^x} a_\lambda, \quad \text{wenn } n \gtreqless \lambda.$$

Man hat dann die a_λ und z so zu wählen, daß $\Sigma D_x x^{-x}$ der erwähnten Voraussetzung entspricht. Hiermit folgt aus (11.) die Formel:

$$(12.) \quad \left| e^{-ax} (ax)^{-\sigma} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\Pi(\sigma+x-1)}{\Pi(\sigma-1)} \left(\frac{-1}{ax}\right)^x \left[\sum_{\lambda=x}^{\infty} a_\lambda z^\lambda \right] \right|_{x_0}^{x}$$
$$= -\left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda z^\lambda \right) \int_{x_0}^{x} e^{-at} (at)^{-\sigma} d(at) - \int_{x_0}^{x} e^{-at} (at)^{-1-\sigma} \left\{ \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\Pi(\sigma+x-1)}{\Pi(\sigma-1)} a_{x-1} \left(\frac{-z}{at}\right)^{x-1} \right\} d(at).$$

Wenn die Konvergenzbedingung $R(a) > 0$ erfüllt ist, dann kann man in (12.) $x = +\infty$ nehmen, und die linke Seite verschwindet dann für x_0.

Wenn der Integrand eine analytische Funktion darstellt, die auf dem ganzen Integrationswege eine Fortsetzung besitzt, dann kann die von $+\infty$ ausgehende, im positiven Sinne um Null herumgelegte und wieder nach $+\infty$ zurückführende Schleife C als Integrationsweg genommen werden.

Die linke Seite abgesehen vom Faktor e^{-ax}, ist die asymptotische Darstellung für $\lim x = +\infty$ eines Zweiges L einer partikulären Lösung von (10.). Durch Umlaufung der singulären Stelle $x = 0$ der Lösungen von (10.) gelangt man in einen andern Zweig K der genannten partikulären Lösung. Dieser Zweig ist wieder Lösung von (10.) und somit gleich

$$A \cdot e^{ax} + B \cdot L.$$

Bei Benutzung von C erhält also die linke Seite in (12.) den Wert A. Aus (12.) folgt somit:

$$(13.) \quad A + \sum_{0}^{\infty} a_\lambda z^\lambda = \frac{1}{2\pi i} e^{\sigma \pi i} \int_{C} e^{-at} (at)^{-1-\sigma} \left\{ \sum_{x=0}^{\infty} \Pi(\sigma+x)\, a_x \left(\frac{-z}{at}\right)^x \right\} d(at)$$

und in dem Integral rechts ist es, wenn die Reihe $\sum_{0}^{\infty} \Pi(\sigma+x)\, a_x \left(\frac{-z}{at}\right)^k$, betrachtet in bezug auf t, konvergiert, nur nötig, daß die beiden Enden der Schleife C die Stelle $t = \infty$ durch solche Werte erreichen, daß $-\frac{\pi}{2} < \arg(at) < \frac{\pi}{2}$.

Diese Formeln benutze ich, um, als Beispiel, die von *Sommerfeld*[2]) gegebenen Darstellungen von Zylinderfunktionen durch bestimmte Integrale abzuleiten.

---

[1]) Spezialfall des Satzes S. 705 Vierteljahresschrift 61 (1916).

[2]) Math. Annalen 47 (1896).

Die Annahmen

$$\sigma = \tau; \quad a_\varkappa = \frac{(-1)^\varkappa \left(\frac{1}{2}\right)^{2\varkappa}}{\Pi(\varkappa)\,\Pi(\tau+\varkappa)}; \quad at = u$$

führen in (13.), wenn man noch z^2 statt z setzt, zur Gleichung

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{-\tau} J_\tau(z) = \frac{e^{\tau\pi i}}{2\pi i} \int_C e^{-u+\frac{z^2}{4u}} \cdot u^{-1-\tau}\, du.$$

Es wird später die Formel gebraucht, die aus dieser hervorgeht durch die Substitution $u = e^{-\pi i}\frac{z^2}{4v}$; sie ergibt, wenn noch $-\tau$ für τ gesetzt wird:

$$(14.) \qquad J_{-\tau}(z) = -\frac{e^{-2\tau\pi i}}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^{\tau} \int_{C_1} e^{-v+\frac{z^2}{4v}} \frac{dv}{v^{1+\tau}}.$$

Der Integrationsweg wird erhalten, indem man C transformiert. Weiter unten werden drei Halbstrahlen von $u = 0$ ausgehend definiert: S_1, S_2, S_3. Es bestehe nun C aus dem Halbstrahle S_2 von ∞ aus bis zum Kreise mit Radius $\left|\frac{z}{2}\right|^2$, dann aus diesem Kreise und schließlich wieder aus dem Halbstrahle S_2 zurück nach ∞.

$$\arg u = -\pi + 2\arg z - \arg v.$$

Nun geht C durch diese Substitution über in C_1, und C_1 besteht aus dem Halbstrahl S_3 bis zum Kreise mit Radius $\left|\frac{z}{2}\right|^2$, dann aus diesem Kreise und endlich aus dem Halbstrahl S_3 zurück nach 0. Der Integrationsweg C_1 beginnt in $v = 0$ im selben Zweige des Integranden, in dem C beginnt bei $u = \infty$, d. h. im Hauptzweig.

Unter Annahme derselben Spezialisationen gehe ich jetzt von der Gleichung (12.) mit $x_0 = \infty$ aus, um andere Integrationswege einzuführen:

$$e^{-ax}(ax)^{-\tau} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \Pi(\tau-1+\varkappa)\left(\frac{-1}{ax}\right)^{\varkappa} \left[\sum_{\lambda=\varkappa}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{z}{2}\right)^{2\lambda}}{\Pi(\lambda)\,\Pi(\tau+\lambda)}\right]$$

$$= -\Pi(\tau-1)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\tau} J_\tau(z) \int_\infty^x e^{-u}\, u^{-\tau}\, du - \int_\infty^x e^{-u+\frac{z^2}{4u}} \frac{du}{u^{1+\tau}}.$$

Man muß annehmen, daß der Integrationsweg ∞ durch solche Werte u verläßt, daß dabei $-\frac{\pi}{2} < \arg u < \frac{\pi}{2}$. Nun soll x nach 0 geführt werden. Wenn $R(\tau) < +1$, konvergiert $\int_\infty^0 e^{-u}\, u^{-\tau}\, du$, und man kann dann immer den Integrationsweg mit der reellen positiven Achse zusammenfallen lassen. Der Wert dieses Integrals ist $\Pi(-\tau)$. Auch das zweite Integral der rechten Seite konvergiert für $x = 0$, aber nur, wenn der Integrationsweg so nach 0 geführt ist, daß dabei $R\left(\frac{z^2}{u}\right) < 0$. Diesen Bedingungen kann folgendermaßen genügt werden: S_1 bezeichne den Halbstrahl durch $u = 0$, der von der negativ imaginären Achse aus durch Drehung um $\arg z$ im Sinne gegen den Uhrzeiger erreicht wird. $0 < \arg z < 2\pi$. S_2 und S_3

bezeichnen die Halbstrahlen durch $u = 0$, die zu beiden Seiten von S_1 liegen und mit S_1 den Winkel η bilden. Die Bezeichnung sei so gewählt, daß der Halbstrahl S_1 mit S_2 zur Deckung kommt, wenn man ihn um η dreht, also gegen den Uhrzeiger, wenn η einen positiven Winkel bedeutet. Wählt man jetzt für η einen beliebigen Winkel zwischen $(-\arg z)$ und $(\pi - \arg z)$, sodaß, wenn $\eta = (-\arg z) + \zeta$ gesetzt wird, $0 < \zeta < \pi$, dann ist für Werte von u auf S_2 $R(u) > 0$ und für Werte von u auf S_1 ist

$$\arg u = -\frac{\pi}{2} + \arg z - \eta = -\frac{\pi}{2} + 2\arg z - \zeta,$$

also

$$\zeta + \frac{\pi}{2} = 2\arg z - \arg u$$

oder

$$R\left(\frac{z^2}{u}\right) < 0$$

Als Integrationswege nehme ich daher die Linienzüge gebildet aus S_2 von ∞ bis $\left|\frac{z}{2}\right|^2$, dann aus einem der beiden Kreisbögen, deren Radius $\left|\frac{z}{2}\right|^2$ ist, dann aus S_3 von $\left|\frac{z}{2}\right|^2$ bis $u = 0$. Der Linienzug, der denjenigen Kreisbogen enthält, der S_1 trifft, sei mit C, der andere mit C' bezeichnet.

Führt man jetzt x auf C nach $u = 0$, so geht die linke Seite in einen gewissen Wert A über, und man hat

$$(15.) \qquad A - \frac{\pi}{\sin \pi\tau}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\tau} J_\tau(z) = -\int_{\infty}^{0} e^{-u+\frac{z^2}{4u}} \frac{du}{u^{1+\tau}}.$$

Aber die Integration in der Ausgangsgleichung kann, statt im Hauptzweige des Integranden ebensowohl in demjenigen Zweige ausgeführt werden, in dem

$$\arg u_2 = 2\pi + \arg u_1, \quad u_2 = u_1 \cdot e^{2\pi i}.$$

Führt man jetzt wieder x auf C nach $u_2 = 0$, so geht die linke Seite in einen andern Wert A_1 über.

$$(16.) \quad e^{2\pi i\tau} A_1 - \Pi(\tau - 1)\, J_\tau(z)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\tau} \int_0^\infty e^{-u}\, u_1^{-\tau}\, du = -\int_\infty^0 e^{-u+\frac{z^2}{4u}} \frac{du}{u^{1+\tau}}.$$

In dieser Gleichung stehen aber dieselben Integralwerte wie in (15.), und so muß man schließen:

$$A_1 = A \cdot e^{-2\pi i\tau}.$$

Endlich beginne ich die Integration in der Ausgangsgleichung wieder bei $u = \infty$ im Hauptzweig des Integranden und führe x auf C' nach $u = 0$. Hierdurch wird aber $u = 0$ im selben Zweige erreicht, wie für die Gleichung (16.), und der Wert, den die linke Seite annimmt, ist daher A_1:

$$A_1 - \frac{\pi}{\sin \pi\tau}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\tau} J_\tau(z) = \int_{0C'}^{\infty} e^{-u+\frac{z^2}{4u}} \frac{du}{u^{1+\tau}}.$$

Subtrahiert man hiervon die Gleichung (15.) und ersetzt den Wert von A_1, so folgt:

$$A\,(e^{-2\pi i\tau} - 1) = \int_{C_1} e^{-u+\frac{z^2}{4u}} \frac{du}{u^{1+\tau}} = 2\pi i \cdot e^{-\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\tau} J_{-\tau}(z),$$

indem die Gleichung (14.) benutzt wurde. Dabei mußte noch berücksichtigt werden, daß in diesem letzten Integrale C_1 in $u = 0$ beginnt, und zwar in demjenigen Zweige des Integranden, der durch

$$\arg u = 2\pi + \arg u_1$$

bezeichnet ist. So findet man

$$A = \frac{\pi}{\sin \pi\tau} e^{\tau\pi i} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\tau} J_{-\tau}(z)$$

und endlich

$$\frac{\pi}{\sin \pi\tau} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\tau} [J_\tau(z) - e^{\tau\pi i} J_{-\tau}(z)] = \int_{\infty C}^{0} e^{-u + \frac{z^2}{4u}} \frac{du}{u^{1+\tau}}.$$

Schließlich wird noch die Substitution $u = e^{-\pi i} \cdot \frac{z}{2} \cdot v$ ausgeführt:

$$\frac{\pi}{\sin \pi\tau} [e^{-\tau\pi i} J_\tau(z) - J_{-\tau}(z)] = \frac{\pi}{i} H_\tau^{(1)}(z) = \int_{\infty D}^{0} e^{\frac{z}{2}\left(v - \frac{1}{v}\right)} \frac{dv}{v^{1+\tau}}.$$

Durch diese Substitution wird der Integrationsweg C übergeführt in D, der geometrisch gleich ist wie C, nur gedreht um $u = 0$ herum gegen den Uhrzeiger, bis der Halbstrahl S_1 mit der positiven imaginären Achse zusammenfällt. Behandelt man (16.) analog mit der Substitution $u = e^{\pi i} \cdot \frac{z}{2} \cdot v$, so erscheint die Formel:

$$\frac{\pi}{\sin \pi\tau} [e^{\tau\pi i} J_\tau(z) - J_{-\tau}(z)] = \frac{\pi}{-i} H_\tau^{(2)}(z) = -\int_{0D'}^{\infty} e^{\frac{z}{2}\left(v - \frac{1}{v}\right)} \frac{dv}{v^{1+\tau}}.$$

Damit sind alle drei Fälle von *Sommerfelds* Integral [1]) abgeleitet; durch die Substitution $v = i \cdot e^{-i\omega}$ geht diese Form über in die von ihrem Entdecker benutzte.

[1]) *Hopf* und *Sommerfeld*, Über komplexe Integraldarstellungen der Zylinderfunktionen. Archiv der Mathematik u. Physik. (3) 18 (1911).

„Zur Bestimmung algebraischer Zahlkörper durch Kongruenzen; eine Anwendung auf die *Abel*schen Gleichungen."

Von Herrn *B. Delaunay* in Kiew [1]).

In seiner Arbeit „Über die Irreduzibilität von Gleichungen" (Sitzb. d. Berl. Akad. [1880] S. 155) hat *Kronecker* die Frage nach der Dichtigkeit der Primzahlen aufgeworfen, für welche eine gegebene Kongruenz eine bestimmte Anzahl von reellen Wurzeln hat; er bemerkte auch, daß zwei ganzzahlige Funktionen, die für jede Primzahl als Kongruenzen die nämliche Anzahl von reellen Wurzeln haben, denselben *Galois*chen Körper bestimmen müssen. Er macht daneben die folgende höchst merkwürdige Bemerkung: „und es ist also (in ähnlicher Weise, wie nach dem *Cauchy*schen Satze eine Funktion durch ihre Randwerte bestimmt wird) mit bloßen Kongruenzbestimmungen der ganze Inbegriff der durch die Gleichung definierten algebraischen Irrationalitäten bestimmt".

Frobenius hat nach den Andeutungen *Kronecker*s die Frage nach den Dichtigkeiten vollständig auseinandergesetzt (Sitzb. d. Berl. Akad. [1896] S. 688) und ist unter anderem zu folgender Tatsache gekommen: es sind für eine jede zyklische Untergruppe der Gruppe eines *Galois*chen Körpers in diesem Körper unendlich viele Primideale vorhanden, die bei den Substitutionen dieser zyklischen Untergruppe und nur bei diesen ungeändert bleiben. Man beweist diesen Satz, indem man den Grenzausdruck $\lim_{s=1} ((s-1)\cdot\zeta_\Omega(s)) = h\cdot x$ in der *Dedekind*schen Theorie der Ideale eines *Galois*chen Körpers verwendet. Mit dieser Tatsache ausgerüstet, beweist man leicht folgendes Lemma, das die angeführte *Kronecker*sche Aussage nur präzisiert:

„Ein *Galois*cher Körper Ω_β ist dann und nur dann in dem *Galois*chen Körper Ω_α enthalten, wenn für alle rationalen Primzahlen q, für die die Kongruenz $\alpha^q \equiv \alpha \pmod{q}$ auch die Kongruenz $\beta^q \equiv \beta \pmod{q}$ gilt."

Es kann dabei eine beliebige endliche Anzahl von Primzahlen ganz außer acht gelassen werden.

---

[1]) Anm. d. Red.: Diese bereits 1914 eingegangene Arbeit konnte infolge der Druckschwierigkeiten während des Krieges bis jetzt nicht veröffentlicht werden.

Unser Ziel ist, auf das vorstehende Lemma gestützt, die Fruchtbarkeit dieser von *Kronecker* ersonnenen neuen Methode zur Bestimmung algebraischer Zahlkörper durch bloße Kongruenzen an einem prägnanten Beispiele zu zeigen: wir leiten nämlich (für den Fall eines Primzahlgrades) den berühmten *Kronecker*schen Satz über *Abel*sche Zahlkörper mit ein paar Worten aus dem einfachen *Eisenstein*schen Reziprozitätssatze ab.

Sei n eine Primzahl.

Nach einem von *Abel* gegebenem Ausdrucke kann man die Wurzel einer *Abel*schen Gleichung n-ten Grades in der Form

$$a + \sqrt[n]{\omega_1} + \sqrt[n]{\omega_2} + \sqrt[n]{\omega_3} + \cdots + \sqrt[n]{\omega_{n-1}}$$

darstellen, wo die ω_i ganze Zahlen aus $\Omega\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)$ sind, die den Gleichungen

(1.) $$\omega_1^\nu = \lambda_\nu^n \omega_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3 \ldots n-1)$$

genügen. Hier ist λ_ν eine Zahl aus $\Omega\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)$, und wenn ψ_1 eine Zahl aus $\Omega\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)$, also eine rationale Funktion von $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ ist, so bezeichnen wir mit ψ_ν die Zahl, die aus ψ_1 durch die Substitution von $e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot \nu}$ für $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ hervorgeht. Dabei können wir immer ν positiv und $< n$ annehmen.

Weil $\left(e^{\frac{2\pi i}{m}}\right)^q \equiv e^{\frac{2\pi i}{m}} \pmod q$ für alle Primzahlen q der Progression $m \cdot x + 1$ und nur für solche Primzahlen stattfindet, (da ja alle diese Primzahlen und nur sie in $\Omega\left(e^{\frac{2\pi i}{m}}\right)$ in verschiedene Primideale ersten Grades zerfallen), so genügt es nach dem Lemma, um den *Kronecker*schen Satz zu beweisen, zu zeigen, daß für alle q einer gewissen derartigen Progression $(\sqrt[n]{\omega_1})^q \equiv \sqrt[n]{\omega_1} \pmod q$, oder, was dasselbe bedeutet, $\omega_1^{\frac{q-1}{n}} \equiv 1 \pmod q$ ist.

Wir werden dies für die Primzahlen q der Progression $n^2 N(\omega_1) \cdot x + 1$ zeigen, womit also bewiesen sein wird, daß unser *Abel*scher Zahlkörper in $\Omega\left(e^{\frac{2\pi i}{n^2 N(\omega_1)}}\right)$ enthalten ist.

Das Primideal $l = 1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}$ kann in ω_1, nach (1.), nur mit einem durch n teilbarem Exponenten vorkommen, denn nimmt man an, daß in ω_1 genau l^t, in λ aber genau l^τ vorkommt, so bekommt man aus (1.) für $\nu = 2$, wenn man dabei berücksichtigt, daß l durch die Substitutionen $e^{\frac{2\pi i}{n}} / e^{\frac{2\pi i}{n} \nu}$ in sich selbst übergeht, $2t = n\tau + t$.

Sei also $\omega_\nu = \bar{\omega}_\nu \, l^{n \cdot \gamma}$, wo $\bar{\omega}_\nu$ schon zu n relativ prim sind. $\bar{\omega}_\nu$ genügen, wie man aus (1.) sieht, folgenden Gleichungen

(1'.) $$\bar{\omega}_1^\nu \beta_\nu^n = \mu_\nu^n \bar{\omega}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3 \ldots n-1),$$

wo die β_ν und μ_ν ganze Zahlen aus $\Omega\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)$ sind.

Wir sehen von endlich vielen Primzahlen q ab, welche nicht zu β_ν und μ_ν relativ prim sind.

Sei

$$(2.)\qquad \bar{\omega}_1^{\frac{q-1}{n}} \equiv e^{\frac{2\pi i}{n} b_1} \pmod{\varrho_1}, \qquad (0 < b_\nu \leqq n;\ \nu = 1, 2, \ldots)$$

$$(3.)\qquad \bar{\omega}_1^{\frac{q-1}{n}} \equiv e^{\frac{2\pi i}{n} b_\nu} \pmod{\varrho_\nu},$$

wo ϱ_1 ein Primideal von q ist (ersten Grades, weil q die Form $n \cdot x + 1$ hat). Aus (3.) wird, wenn θ die kleinste positive Lösung der Kongruenz $\nu \cdot \theta \equiv 1 \pmod{n}$:

$$(4.)\qquad \bar{\omega}_\theta^{\frac{q-1}{n}} \equiv e^{\frac{2\pi i}{n} b_\nu \theta} \pmod{\varrho_1};$$

nach (1′.) ist aber

$$\bar{\omega}_1^{\theta}\, \beta_\theta^n = \mu_\theta^n\, \bar{\omega}_\theta$$

oder, wenn man in die $\frac{q-1}{n}$te Potenz erhebt und den *Fermat*schen Satz berücksichtigt, $\bar{\omega}_1^{\theta\frac{q-1}{n}} \equiv \bar{\omega}_\theta^{\frac{q-1}{n}} \pmod{\varrho_1}$; also wird aus (4.):

$$(5.)\qquad \bar{\omega}_1^{\theta\frac{q-1}{n}} \equiv e^{\frac{2\pi i}{n} b_\nu \theta} \pmod{\varrho_1}$$

und aus (2.), wenn man in die θte Potenz erhebt:

$$(6.)\qquad \bar{\omega}_1^{\theta\frac{q-1}{n}} \equiv e^{\frac{2\pi i}{n} b_1 \theta} \pmod{\varrho_1};$$

aus (5.) und (6.) folgt $b_1 = b_\nu$.

Eine jede ganze Zahl aus $\Omega\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)$ kann durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz von $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ in eine sogenannte semiprimäre Zahl verwandelt werden (*Hilbert*, Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper S. 369). Sei $\bar{\omega}_1\, e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot x} = \bar{\bar{\omega}}$ eine solche semiprimäre Zahl.

Es wird $\left(\frac{\bar{\bar{\omega}}_1}{\varrho_\nu}\right) \equiv \bar{\bar{\omega}}_1^{\frac{q-1}{n}} \pmod{\varrho_\nu} = \left(\frac{\bar{\omega}_1}{\varrho_\nu}\right)\left(\frac{e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot x}}{\varrho_\nu}\right) = \left(\frac{\bar{\omega}_1}{\varrho_\nu}\right)$, weil ja $\left(\frac{e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot x}}{\varrho_\nu}\right) \equiv \left(e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot x}\right)^{\frac{q-1}{n}} = 1 \pmod{\varrho_\nu}$ ist, da q die Form $n^2 \cdot x + 1$ hat.

Und also haben wir nach dem vorstehenden $\left(\frac{\bar{\bar{\omega}}_1}{\varrho_1}\right) = \left(\frac{\bar{\bar{\omega}}_1}{\varrho_\nu}\right) = e^{\frac{2\pi i}{n} b_1}$. Wenn also

$\left(\frac{\bar{\bar{\omega}}_1}{q}\right) = \left(\frac{\bar{\bar{\omega}}_1}{\varrho_1}\right)\left(\frac{\bar{\bar{\omega}}_1}{\varrho_2}\right) \cdots\cdots \left(\frac{\bar{\bar{\omega}}_1}{\varrho_{n-1}}\right) = \left(\frac{\bar{\bar{\omega}}_1}{\varrho_1}\right)^{n-1} = +1$ ist, so ist auch $\left(\frac{\bar{\bar{\omega}}_1}{\varrho_1}\right) = +1$.

Nach dem *Eisenstein*schen Reziprozitätssatze, (der für die semiprimären Zahlen gilt), haben wir $\left(\frac{\bar{\bar{\omega}}_1}{q}\right) = \left(\frac{q}{\bar{\bar{\omega}}_1}\right)$; für alle q der Form $N(\bar{\bar{\omega}}_1)\, x + 1$ ist aber

$\left(\frac{q}{\overline{\overline{\omega}}_1}\right) = +1$, und also auch $\left(\frac{\overline{\overline{\omega}}_1}{q}\right) = +1$ und nach dem bewiesenen also auch $\left(\frac{\overline{\overline{\omega}}_1}{\varrho_\nu}\right) = +1$.

Daraus folgt $\overline{\overline{\omega}}_1^{\frac{q-1}{n}} \equiv +1 \pmod{q}$ oder $\overline{\omega}_1^{\frac{q-1}{n}} \equiv +1 \pmod{q}$ das letzte, weil $e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot x \cdot \frac{q-1}{n}} = +1$, da q die Form $n^2 \cdot x + 1$ hat; weil aber $l^{n \cdot \gamma \cdot \frac{q-1}{n}} = l^{(q-1)\cdot\gamma}$ nach dem *Fermat*schen Satze $\equiv +1 \pmod{q}$ ist, sehen wir, daß auch die Kongruenz

$$\omega_1^{\frac{q-1}{n}} \equiv +1 \pmod{q}$$

in der Tat für alle Primzahlen der Progression $n^2 N(\omega_1) \cdot x + 1$ stattfindet.

Grad. R. R. 3

JUL 11 1923

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schäfer, Schlesinger, Schottky

von

K. Hensel.

Band 152.

Heft 3/4.

Ausgegeben den 20. April.

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP

1923

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 152. Heft 3/4.

Inhaltsverzeichnis.

Reye, Th., Die kubische Raumkurve als Leitkurve von Regelflächen dritten bis sechsten Grades . . . . . Seite 125

Hasse, Helmut, Über die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Körper der rationalen Zahlen . . . . . — 129

Burkhardt, F., Über eine Verallgemeinerung der Tetraedergruppe . . . . — 149

Staude, Otto, Über Kollineationen und Korrelationen im Raume . . . . . — 156

Rychlik, K., Eine stetige nicht differenzierbare Funktion im Gebiete der *Hensel*schen Zahlen . . . . . — 178

Kürschák, Josef, Irreduzible Formen . . . . . — 180

Rados, Gustav, Bemerkungen und Ergänzungen zum Beweis eines *Kummer*schen Theorems . . . . . — 192

Riebesell, P., Über die Lehre vom statistischen Ausgleich . . . . . — 198

Hasse, Helmut, Über die Äquivalenz quadratischer Formen im Körper der rationalen Zahlen . . . . . — 205

Hensel, Kurt, Über ein neues Normenrestsymbol und seine Anwendung auf die Theorie der Normenreste in allgemeinen algebraischen Körpern . . — 225

Brandt, H., Klassenanzahlen bei linearen Substitutionen . . . . . — 235

Haupt, Otto, Über Asymptoten ebener Kurven . . . . . — 239

An unsere Mitarbeiter!

Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Die kubische Raumkurve als Leitkurve von Regelflächen dritten bis sechsten Grades.

Von Herrn *Th. Reye* in Würzburg.

1. Eine kubische Raumkurve r^3 bestimmt bekanntlich einen Nullraum N_r als eine seiner kubischen Nullkurven. Jedem Punkte P der Kurve ist seine Schmiegungsebene π in N_r zugeordnet; die Tangenten und Schmiegungsstrahlen von r^3 sind in dem Nullraum N_r sich selbst zugeordnet, also in seinem linearen Strahlenkomplex Γ_r enthalten (vgl. G. d. L. [1]), II, S. 177). Durch r^3 gehen ∞^2 Regelflächen und ∞^1 Strahlenkegel zweiter Ordnung; mit jeder anderen Fläche zweiten Grades hat die Raumkurve r^3 sechs Punkte gemein, die aber paarweise konjugiert imaginär sein, auch teilweise oder alle zusammenfallen können.

2. Außer der Raumkurve r^3 seien zwei windschiefe Geraden u, v gegeben. Sie sind die Kollineationsachsen von ∞^1 geschart kollinearen Räumen und bestimmen deren ∞^1 gescharte Kollineationen (u, v). Die Punkte und Ebenen der Geraden u, v und die ∞^2 mit u und v inzidenten Strahlen sind die Deckelemente der ∞^1 kollinearen Räume. Mit jedem Strahle der linearen Kongruenz K_1', die u und v zu Leitgeraden hat, sind ∞^1 homologe Punkte und ∞^1 homologe Ebenen der geschart kollinearen Räume inzident. Homologe Strahlen dieser Räume bilden je eine durch u und v gehende Regelschar zweiten Grades oder ausnahmsweise einen durch u oder v gehenden Strahlenbüschel erster Ordnung.

3. Die zwei windschiefen Geraden u, v sind in ∞^1 Nullräumen N_i einander zugeordnet, sie werden also durch deren ∞^1 Nullkorrelationen ν_i miteinander vertauscht. Die linearen Strahlenkomplexe Γ_i dieser Nullräume bilden einen Komplexbüschel; sie haben die ∞^2 mit u und v inzidenten Strahlen miteinander gemein, gehen also durch die lineare Kongruenz K_1'. Die ∞^1 Nullkorrelationen ν_i sowie die ∞^1 gescharten Kollineationen (u, v) lassen alle Strahlen von K_1' in Ruhe. Aus je zweien der Nullkorrelationen ν_i resultiert eine der ∞^1 gescharten Kollineationen. Die ν_i bilden mit den ∞^1 Kollineationen (u, v) eine Gruppe.

4. Der Ort eines Strahles s, der die kubische Raumkurve r^3 und die zwei windschiefen Geraden u, v schneidet, ist eine Regelfläche sechsten Grades R^6. Denn u, v und eine dritte Gerade w sind die Leitgeraden einer Regelschar zweiten Grades,

[1]) Mit „G. d. L." zitieren wir *Reye*, Geometrie der Lage, Teil I, 5. Aufl., Lpz. 1909, Teil II und III, 4. Aufl., Lpg. 1907—10.

und nur sechs Strahlen dieser Schar schneiden die Raumkurve (1.). Die sechs Strahlen von R^6 sind in dem linearen Komplex Γ_r enthalten und Schmiegungsstrahlen von r^3, wenn w einer der Geraden u, v zugeordnet ist in dem durch r^3 bestimmten Nullraum N_r. Die Punkte von u und v sind dreifache Punkte der Regelfläche R^6, denn die Ebenen von v und die von u enthalten je drei Strahlen von R^6. Die Raumkurve r^3 wird durch die gescharten Kollineationen (u, v) in ∞^1 zu ihr projektive kubische Raumkurven r_1^3 übergeführt; diese liegen mit r^3, u und v auf R^6, ihre homologen Punkte sind auf je einem Regelstrahle s von R^6 enthalten (2.). Ein Strahl s beschreibt die Regelfläche R^6, wenn er an u, v und r^3 oder an u, v und einer der Raumkurven r_1^3 entlang gleitet. Wird r^3 durch eine der Kurven r_1^3 ersetzt, so ändert R^6 sich nicht, wohl aber ändern sich i. a. der Nullraum N_r und sein linearer Strahlenkomplex Γ_r.

5. Die ∞^1 Nullkorrelationen ν_i, die u mit v vertauschen, lassen die Regelstrahlen der Fläche R^6 in Ruhe (3.); sie transformieren aber die kubische Raumkurve r^3 und jede der ∞^1 Raumkurven r_1^3 in ∞^1 kubische Ebenengewinde ϱ_i^3, die aus je ∞^1 Berührungsebenen von R^6 bestehen. Die Regelfläche R^6 ist invariant für die ∞^1 Nullkorrelationen ν_i, also nullinvariant für jeden der ∞^1 linearen Komplexe Γ_i (3.); sie wird beschrieben von einem Strahle s, der so an u und v hingleitet, daß er die abwickelbare, von einem der Ebenengewinde ϱ_i^3 umhüllte Fläche vierten Grades berührt.

Sind die Geraden u, v in dem linearen Komplex Γ_r enthalten, also sich selbst zugeordnet in dem durch r^3 bestimmten Nullraum N_r, so ist N_r nullinvariant für die ∞^1 linearen Komplexe Γ_i (G. d. L. II, S. 144). Die kubischen Raumkurven r_i^3, denen je eines der ∞^1 Ebenengewinde ϱ_i^3 sich anschmiegt, sowie die ∞^1 Raumkurven r_1^3 auf R^6 sind in diesem Falle Nullkurven des Nullraumes N_r.

6. Die Fläche R^6 zerfällt, wenn die Raumkurve r^3 und die Gerade v sich in einem Punkte V schneiden, in die Ebene $u\,V$ und eine Regelfläche fünften Grades R^5. Die Punkte von u sind zweifache, die von v sind dreifache Punkte von R^5 (4.). Die Fläche R^5 ist der Ort der ∞^1 zu r^3 projektiven kubischen Raumkurven r_1^3, in die r^3 übergeführt wird durch die ∞^1 gescharten Kollineationen (u, v); sie wird umhüllt von den ∞^1 projektiven kubischen Ebenengewinden ϱ_i^3, in die r^3 transformiert wird durch die ∞^1 Nullkorrelationen ν_i. Die homologen Punkte der Raumkurven r_1^3 und die homologen Ebenen der Ebenengewinde ϱ_i^3 sind mit je einem Regelstrahle von R^5 inzident. Die ∞^1 Raumkurven r_1^3 haben V zum Deckpunkt mit r^3, die Ebenengewinde ϱ_i^3 haben $u\,V$ zur Deckebene.

7. Ist v eine Bisekante von r^3, oder sind u, v zwei Unisekanten der Raumkurve r^3, so zerfällt R^6 in zwei Ebenen und eine Regelfläche vierten Grades R^4. Diese verbindet u und v mit r^3 und ist der Ort der ∞^1 geschart kollinearen kubischen Raumkurven r_1^3. Sie hat im ersteren Falle die Punkte von v zu dreifachen Punkten, im letzteren Falle die von u und v zu Doppelpunkten, und wird umhüllt von den ∞^1 projektiven kubischen Ebenengewinden ϱ_i^3 (5.). Die Regelstrahlen von R^4 sind mit je ∞^1 homologen Punkten der Raumkurven r_1^3 und mit je ∞^1 homologen Ebenen der Gewinde ϱ_i^3 inzident. Die Schnittpunkte von r^3 mit v oder mit u und v sind Deckpunkte der r_1^3; sie werden aus u bezw. aus v und u durch Deckebenen der

projektiven Ebenengewinde ϱ_i^3 projiziert. Sind u, v zwei Schmiegungsstrahlen von r^3, so sind die ∞^1 Raumkurven r_1^3 und die ∞^1 Raumkurven r_i^3, denen sich je eines der Ebenengewinde ϱ_i^3 anschmiegt, kubische Nullkurven des durch r^3 bestimmten Nullraums; sie haben mit r^3 die Schmiegungsstrahlen u, v und deren zwei Kurvenpunkte gemein.

8. Die kubische Raumkurve r^3 wird durch die gescharten Kollineationen (u, v) in ∞^1 kubische Raumkurven r_1^3 einer Regelfläche dritten Grades R^3 transformiert, wenn u eine Unisekante, v eine Bisekante oder Tangente von r^3 ist. Ein an r^3, u und v entlang gleitender Strahl s beschreibt die kubische Fläche R^3. Diese hat die Punkte von v zu Doppelpunkten und berührt die Ebenen von u in je zwei Punkten von u; sie wird umhüllt von den ∞^1 kubischen Ebenengewinden ϱ_i^3, in die r^3 und jede der Raumkurven r_1^3 durch die Nullkorrelationen ν_i transformiert wird. Die homologen Punkte der r_1^3 und die homologen Ebenen der ϱ_i^3 sind mit je einem Regelstrahle s von R^3 inzident. Die Schnittpunkte von r^3 mit u und v sind Deckpunkte der geschart kollinearen Raumkurven r_1^3; sie werden bzw. aus v und u durch Deckebenen der projektiven Ebenengewinde ϱ_i^3 projiziert. Ebenso wie durch u, v und r^3, ist die Fläche R^3 durch u, v und eine der Raumkurven r_1^3 bestimmt. Sie ist auch durch u, v und eines der Ebenengewinde ϱ_i^3 bestimmt und wird durch einen Strahl s beschrieben, der so an u und v gleitet, daß er die von ϱ_i^3 umhüllte abwickelbare Fläche beständig berührt.

9. Werden die Punktreihe u und die Raumkurven r^3, r_1^3 auf den Ebenenbüschel v perspektiv bezogen, so werden sie zueinander projektiv. Ihre homologen Punkte liegen auf je einem Regelstrahl s der Fläche R^3, und u erzeugt mit r^3 und jeder der Raumkurven r_1^3 die kubische Regelschar $\mathfrak{R}^3$ von R^3. Aus einem Punkte S von r^3 werden u und r^3 durch einen Strahlenbüschel erster und einen Strahlenkegel zweiter Ordnung projiziert; diese sind projektiv und haben einen Deckstrahl gemein, erzeugen folglich einen Ebenenkegel zweiter Ordnung (G. d. L. I, S. 124). Die kubische Regelschar $\mathfrak{R}^3$ wird also aus den Punkten von r^3 und ebenso aus denen jeder r_1^3 durch Ebenenkegel 2. Ordnung projiziert, die zueinander, zu der Punktreihe u und dem Ebenenbüschel v projektiv sind. Jeder dieser Ebenenkegel erzeugt mit v die kubische Regelschar $\mathfrak{R}^3$.

10. Die ∞^1 Nullkorrelationen ν_i lassen jeden Strahl von $\mathfrak{R}^3$ in Ruhe und transformieren jeden Punkt von R^3 in eine Berührungsebene der Fläche, jeden zu $\mathfrak{R}^3$ perspektiven Ebenenkegel zweiter Ordnung in eine zu $\mathfrak{R}^3$ perspektive Kurve zweiter Ordnung. Die kubische Regelschar $\mathfrak{R}^3$ wird also aus den Punkten ihres Trägers R^3 durch Ebenenkegel zweiter Ordnung $\varkappa^2$ projiziert (9.) und von den Berührungsebenen der R^3 in Kurven zweiter Ordnung k^2 geschnitten; diese Kegel $\varkappa^2$ und Kurven k^2 sind zu der Punktreihe u, dem Ebenenbüschel v und zueinander projektiv. Jeder der Kegelschnitte k^2 erzeugt mit der Punktreihe u die Regelschar $\mathfrak{R}^3$.

Ist u ein Schmiegungsstrahl, und v eine Tangente von r^3, so sind die ∞^1 Raumkurven r_1^3 kubische Nullkurven des durch r^3 bestimmten Nullraumes N_r. Sie berühren v in demselben Punkte V mit r^3 und haben mit r^3 die Schmiegungsebene des Punktes V, den Kurvenpunkt U von u und dessen Schmiegungsebene gemein.

11. Die ∞^1 geschart kollinearen kubischen Raumkurven r_1^3 liegen mit r^3, u

und v auf einer Regelfläche zweiten Grades R^2, wenn u, v zwei Bisekanten oder insbesondere Tangenten von r^3 sind. Sie schneiden oder berühren u und v in denselben Punkten wie r^3, und bilden auf R^2 einen Kurvenbüschel. Ihre homologen Punkte sind mit je einem Strahle s von R^2 inzident, der u und v schneidet, ebenso ihre homologen Schmiegungsebenen; ihre homologen Tangenten und Bisekanten bilden je eine durch u und v gehende Regelschar zweiten Grades. Berühren u und v die Raumkurve r^3, so sind die ∞^1 Raumkurven r_1^3 kubische Nullkurven des durch r^3 bestimmten Nullraumes N..

Über die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Körper der rationalen Zahlen.

Von Herrn *Helmut Hasse* in Marburg a. L.

Inhalt.

Seite

A. Einleitung ... 129
§ 1. Fragestellung und Behandlungsmethode ... 129
§ 2. Allgemeines ... 131
B. Unäre und binäre Formen ... 134
§ 3. Unäre Formen ... 134
§ 4. Darstellbarkeit der Null in $K(p)$ durch ternäre Formen ... 134
§ 5. Darstellbarkeit in $K(p)$ durch binäre Formen ... 135
§ 6. Darstellbarkeit der Null in $K(1)$ durch ternäre Formen ... 135
§ 7. Darstellbarkeit in $K(1)$ durch binäre Formen ... 137
C. Ternäre Formen ... 138
§ 8. Darstellbarkeit der Null in $K(p)$ durch quaternäre Formen ... 139
§ 9. Darstellbarkeit in $K(p)$ durch ternäre Formen ... 141
§ 10. Darstellbarkeit der Null in $K(1)$ durch quaternäre Formen ... 142
§ 11. Darstellbarkeit in $K(1)$ durch ternäre Formen ... 143
D. n-äre Formen ($n \geqq 4$) ... 145
§ 12. Darstellbarkeit in $K(p)$ durch n-äre Formen ($n \geqq 4$) ... 145
§ 13. Darstellbarkeit in $K(1)$ durch n-äre Formen ($n \geqq 4$) ... 146
§ 14. Zusammenfassung ... 147

A. Einleitung.

§ 1. Fragestellung und Behandlungsmethode.

Ich will in dieser Arbeit folgende Frage vollständig beantworten:

(I) *Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine rationale Zahl m durch eine quadratische Form mit rationalen Koeffizienten*

$$f = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i\, x_k;\ (a_{ik} = a_{ki})$$

rational (d. h. mit rationalen Werten der Variablen x_i) darstellbar ist?

In der klassischen, auf *Gauß* fußenden Theorie der Darstellung von Zahlen durch quadratische Formen wird die entsprechende Frage behandelt, wenn für Koeffizienten, Variable und dargestellte Zahlen der Ring $R(1)$ aller ganzen Zahlen zugrunde gelegt ist. Zwar verdienen vom zahlentheoretischen Standpunkt die

hierher gehörigen Untersuchungen und Resultate das Hauptinteresse. Es erscheint mir jedoch für eine systematische Theorie vorteilhaft, von den Untersuchungen für den weiteren Bereich $K(1)$ aller rationalen Zahlen auszugehen. Es zeigt sich nämlich [1]), daß für die ganzzahlige Darstellbarkeit einer ganzen Zahl m durch eine ganzzahlige quadratische Form $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$ zwar gewisse, allgemein-notwendige Kriterien in Form von arithmetischen Beziehungen zwischen m und den a_{ik} stets existieren, allgemein-hinreichende Kriterien in solch geschlossener Form jedoch nicht angebbar sind, vielmehr in jedem einzelnen Falle durch ein besonderes (endliches) Verfahren (Reduktion) erschlossen werden müssen.

Die genannten notwendigen Kriterien erweisen sich aber im wesentlichen hinreichend für die Darstellbarkeit im Bereich $K(1)$. Daher bilden die Untersuchungen in $K(1)$ eine natürliche Grundlage für die spezielleren im engeren Bereich $R(1)$. Die Existenz von allgemein-hinreichenden Darstellbarkeitskriterien in $K(1)$ ermöglicht eine weit größere Ausdehnung und eine einheitlichere Darstellung der Resultate. Auch lassen sich die Untersuchungen hier infolge der Körpereigenschaft von $K(1)$ viel einfacher durchführen als im Ring $R(1)$. Aus all diesen Gründen erscheint mir eine Voranstellung der Darstellbarkeitstheorie für den Körper $K(1)$ zweckmäßig, und soll daher in dieser Arbeit eine von den Resultaten für $R(1)$ unabhängige Behandlung dieser Theorie gegeben werden.

Herr *Hensel* hat in seiner „Zahlentheorie" den Weg zu einer solchen Behandlung gewiesen. Er untersucht dort als Anwendung seiner in den vorhergehenden Kapiteln entwickelten Theorie der p-adischen Zahlen im Kapitel XII [2]) die binären quadratischen Formen, indem er die Darstellbarkeitsbedingungen zunächst gesondert für die einzelnen Körper $K(p)$ [3]) aufstellt und daraus durch Zusammenfassung notwendige und hinreichende Bedingungen dafür erhält, daß eine rationale Zahl für alle $K(p)$ gleichzeitig („überall") darstellbar ist. Da nun der Körper $K(1)$ in allen $K(p)$ als gemeinsamer Unterkörper enthalten ist, sind die so gewonnenen Kriterien jedenfalls notwendig für die Darstellbarkeit in $K(1)$. Ob sie auch hinreichend sind, wird in Kap. XII nicht entschieden.

Diese hier auftretende Frage, ob das Bestehen einer Darstellbarkeitsbeziehung für alle $K(p)$ für das Bestehen dieser Beziehung in $K(1)$ nicht nur notwendig ist, (was aus dem Enthaltensein von $K(1)$ in jedem $K(p)$ ohne weiteres folgt), sondern auch hinreicht, ist typisch für die ganze durch Herrn *Hensel* eingeleitete Behandlungsweise, nicht allein hier bei den binären quadratischen Formen, sondern auch allgemein bei allen derartigen Untersuchungen. Ich werde in dieser Arbeit die aufgeworfene Frage für quadratische Formen beliebiger Variablenzahl in bejahendem Sinne beantworten, d. h. den Satz beweisen:

(II) Fundamentalsatz: *Damit eine rationale Zahl m durch eine quadratische*

---

[1]) Siehe etwa *Bachmann*, Arithmetik der quadr. Formen, Kap. IX.

[2]) Im folgenden zitiert mit „Kap. XII".

[3]) Darunter sind hier wie im folgenden stets die Körper $K(p)$ für jede endliche Primzahl p, sowie der Körper $K(p_\infty)$ (Kap. XII, § 1) zu verstehen.

Form f mit rationalen Koeffizienten rational darstellbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß m durch f in allen $K(p)$ darstellbar ist.

Durch diesen Satz, der die Fruchtbarkeit der *Hensel*schen („*p*-adischen") Behandlungsweise klar hervortreten läßt, wird die an die Spitze gestellte Frage (I) vollständig auf die entsprechende Frage für die einzelnen $K(p)$ zurückgeführt. Die beiden Hauptaufgaben im folgenden sind also:

(III) a) *Aufstellung der Darstellbarkeitskriterien für die $K(p)$.*
b) *Nachweis des Fundamentalsatzes* (II).

§ 2. Allgemeines.

Im Anschluß an die allgemeinen Betrachtungen in Kap. XII, § 2 über quadratische Formen beliebiger Variablenzahl stelle ich einige im folgenden häufig zur Anwendung kommende Bemerkungen und Sätze voran.

Jeder Zahl m ($\neq 0$) der Körper $K(1)$ und $K(p)$ liegt eine von allen Quadraten des betr. Körpers befreite, eindeutig bestimmte *reduzierte* Zahl zugrunde, die ich auch ihren $\left\{\begin{matrix}\textit{rationalen}\\ \textit{p-adischen}\end{matrix}\right\}$ *Kern* nenne. Nur dieser ist für die Darstellbarkeit von m durch eine quadratische Form in $\left\{\begin{matrix}K(1)\\ K(p)\end{matrix}\right\}$ maßgebend, (da jedes in m enthaltene Quadrat durch Division in die darstellenden Variablen gezogen werden kann). Die rationalen Kerne sind ganze (positive oder negative) Zahlen mit lauter verschiedenen Primfaktoren (ganze, quadratfreie Zahlen), die p-adischen Kerne

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für} & p = p_\infty & : (-1)^\beta \\ ,, & \text{ungerades } p & : p^\alpha w_p^\beta \\ ,, & p = 2 & : 2^\alpha (-1)^\beta 5^\gamma \end{array}\right\} \alpha, \beta, \gamma = 0 \text{ oder } 1;\ w_p \text{ primitive Wurzel der Gleichung: } x^{p-1} \equiv 1 \ (p).$$

Alle p-adischen Zahlen, die denselben p-adischen Kern haben, fasse ich in eine *p-adische Zahlklasse* zusammen, sodaß $K(p)$ für $p = p_\infty$ in zwei, für ungerades p in vier, für $p = 2$ in acht verschiedene Zahlklassen zerfällt, deren jede durch ihren Kern oder irgendeine ihr angehörige Zahl eindeutig bestimmt ist.

Eine rationale Quadratzahl (d. h. eine rationale Zahl vom Kern $+1$) ist natürlich auch in allen $K(p)$ Quadratzahl. Umgekehrt ist aber auch eine rationale Zahl, die in allen $K(p)$ Quadratzahl ist (zur p-adischen Zahlklasse von $+1$ gehört), Quadratzahl in $K(1)$. Denn eine solche Zahl hat für jedes endliche p gerade Ordnungszahl, ist also durch keine endliche Primzahl in ungerader Potenz teilbar und positiv, da sie in $K(p_\infty)$ Quadratzahl ist.

Wie man leicht sieht, liegt hierin der Beweis des Fundamentalsatzes (II) für unäre Formen.

Quadratische Formen [1]), die durch lineare Substitutionen mit $\left\{\begin{matrix}\text{rationalen}\\ p\text{-adischen}\end{matrix}\right\}$ Koeffizienten nicht verschwindender Determinante zusammenhängen, nenne ich *in* $\left\{\begin{matrix}K(1)\\ K(p)\end{matrix}\right\}$ *äquivalent* oder $\left\{\begin{matrix}\textit{rational}\\ \textit{p-adisch}\end{matrix}\right\}$ *äquivalent.* $\left\{\begin{matrix}\text{Rational}\\ p\text{-adisch}\end{matrix}\right\}$ äquivalente Formen

[1]) Die Koeffizienten der im folgenden betrachteten Formen sind bei Untersuchungen in $\left\{\begin{matrix}K(1)\\ K(p)\end{matrix}\right\}$ als beliebige $\left\{\begin{matrix}\text{rationale}\\ p\text{-adische}\end{matrix}\right\}$ Zahlen vorausgesetzt.

stellen genau dieselben $\left\{\begin{matrix}\text{rationalen}\\ p\text{-adischen}\end{matrix}\right\}$ Zahlen in $\left\{\begin{matrix}K(1)\\ K(p)\end{matrix}\right\}$ dar. Insbesondere gilt dies auch für die Darstellbarkeit der Null in $\left\{\begin{matrix}K(1)\\ K(p)\end{matrix}\right\}$.

Jede quadratische Form ist einer Anzahl *reiner Formen*, d. h. Formen

$$F = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i^2 \tag{1.}$$

mit nur rein quadratischen Gliedern $\left\{\begin{matrix}\text{rational}\\ p\text{-adisch}\end{matrix}\right\}$ äquivalent (Kap. XII, § 2). Für die Darstellbarkeitsuntersuchungen in $\left\{\begin{matrix}K(1)\\ K(p)\end{matrix}\right\}$ darf ich mich daher nach dem eben Bemerkten auf solche reinen Formen oder einfacher auf die in $\left\{\begin{matrix}K(1)\\ K(p)\end{matrix}\right\}$ äquivalenten Formen

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 \tag{2.}$$

beschränken, wo die a_i die $\left\{\begin{matrix}\text{rationalen}\\ p\text{-adischen}\end{matrix}\right\}$ Kerne der A_i sind. Solche Formen (2.) nenne ich *reine Kernformen in* $\left\{\begin{matrix}K(1)\\ K(p)\end{matrix}\right\}$. Ist der erste Koeffizient einer reinen Form $+1$, so nenne ich sie außerdem *normiert.* Dies kann z. B. bei den Formen (1.) bezw. (2.) durch Division mit A_1 bezw. a_1 erreicht werden [1]). Da die Darstellbarkeit der Null auch gegen Multiplikation der Form mit von Null verschiedenen Zahlen invariant ist, brauche ich zur Entscheidung über sie nur normierte reine Kernformen zu betrachten.

Die *Diskriminante* einer quadratischen Form, d. h. die Determinante $D = |a_{ik}|$ ihres Koeffizientensystems, setze ich in dieser Arbeit durchweg von Null verschieden voraus. Da sich diese Diskriminante bei $\left\{\begin{matrix}\text{rationaler}\\ p\text{-adischer}\end{matrix}\right\}$ Transformation nur mit einem $\left\{\begin{matrix}\text{rationalen}\\ p\text{-adischen}\end{matrix}\right\}$ Quadrat multipliziert, haben $\left\{\begin{matrix}\text{rational}\\ p\text{-adisch}\end{matrix}\right\}$ äquivalente Formen denselben $\left\{\begin{matrix}\textit{rationalen}\\ \textit{p-adischen}\end{matrix}\right\}$ *Diskriminantenkern.* Die einzelnen p-adischen Diskriminantenkerne d_p ein- und derselben Form aus $K(1)$ sind zugleich die p-adischen Kerne des rationalen Diskriminantenkerns d. Im folgenden halte ich an dieser Bezeichnung durchweg fest und spreche auch kurz von den *Invarianten* d und d_p.

Wichtig ist noch die Bemerkung, daß für ein gerades n offenbar $\left\{\begin{matrix}d\\ d_p\end{matrix}\right\}$ gegen Multiplikation der Form mit von Null verschiedenen $\left\{\begin{matrix}\text{rationalen}\\ p\text{-adischen}\end{matrix}\right\}$ Zahlen invariant ist.

Besteht für eine reine Form in $\left\{\begin{matrix}K(1)\\ K(p)\end{matrix}\right\}$ eine nicht identische Gleichung $f = 0$, so kann man, ganz analog wie in Kap. XII, S. 307 f., allgemein nachweisen, daß diese

[1]) Die Form (2.) geht durch Division mit a_1 zwar nicht unmittelbar in eine normierte reine *Kern*form über, kann aber durch anschließende Transformation leicht in eine solche übergeführt werden.

Gleichung auch mit sämtlich von Null verschiedenen Variablen besteht [1]). Daraus ergibt sich sofort:

(**IV**) *Damit* $m\ (\neq 0)$ *in* $\begin{Bmatrix} K(1) \\ K(p) \end{Bmatrix}$ *durch eine beliebige* n*-äre Form* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *darstellbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß die Null in* $\begin{Bmatrix} K(1) \\ K(p) \end{Bmatrix}$ *durch die* $(n+1)$*-äre Form*

$$F = f(x_1, \ldots, x_n) - m x^2$$

darstellbar ist [2]).

Denn man darf f durch Transformation in eine reine Form verwandelt und dann nach dem eben Bemerkten $x \neq 0$ voraussetzen.

Wie man sofort sieht, reduzieren sich nach diesem Satz (IV) die beiden auf S. 131 hervorgehobenen Hauptaufgaben (III) und damit die Angabe der gesuchten Darstellungskriterien (für $m \neq 0$) in $K(1)$ durch n-äre Formen vollständig auf folgende beiden Aufgaben:

(**V**)
- **a)** *Aufstellung der Darstellbarkeitskriterien für* $m = 0$ *in* $K(p)$ *durch* $(n+1)$*-äre Formen.*
- **b)** *Nachweis des Fundamentalsatzes* (II) S. 130 *für* $m = 0$ *und* $(n+1)$*-äre Formen.*

Die Darstellbarkeitskriterien für $m = 0$ in $K(1)$ folgen natürlich ebenfalls aus (V) a) und b). Sowohl (V) a) als (V) b) lassen sich für beliebiges n auf die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ zurückführen. Daher behandle ich diese Spezialfälle, sowie den trivialen $n = 1$ vorweg gesondert (Abschn. B., C.), daran anschließend dann den allgemeinen Fall (Abschn. D.).

Für $n = 1$ und $n = 2$ ist (V) a) bereits von Herrn *Hensel* in Kap. XII, § 3—6 vollständig durchgeführt, sodaß hier nur noch (V) b) zu erledigen bleibt.

Bei der Untersuchung (V) a) bediene ich mich mit Vorteil der ohne weiteres einleuchtenden Bemerkung, daß f sicher dann die Null in $K(p)$ darstellt, wenn dies nur für irgendeine binäre oder höhere Teilform von f der Fall ist. Dabei verstehe ich unter *Teilform* jede Teilsumme von Gliedern von f, die mit den übrigen Gliedern keine Variable gemeinsam haben, speziell also jedes Aggregat von Gliedern einer reinen Form.

Der Nachweis (V) b) stützt sich für $n = 2$ auf ein von *Lagrange* herrührendes Reduktionsverfahren [3]), für $n \geqq 3$ wesentlich auf den *Dirichlet*schen Satz, daß in jeder teilerfreien arithmetischen Reihe mindestens eine Primzahl enthalten ist.

---

[1]) Dieser Nachweis, (der darin besteht, die Anzahl der von Null verschiedenen Variablen schrittweise um eins zu erhöhen), beruht, ebenso wie der Beweis des folgenden Satzes, allein auf der Körpereigenschaft der Bereiche $K(1)$ und $K(p)$. Im Ring $R(1)$ besteht kein Analogon zu dem folgenden Satz (IV); daher ist dort die die ganze Theorie außerordentlich vereinfachende Beschränkung auf homogene Darstellungsgleichungen nicht möglich, und gerade daher wird die Theorie für $R(1)$ ungleich komplizierter.

[2]) Unter *Darstellungen der Null* verstehe ich stets *nicht identische.*

[3]) Siehe *Dirichlet.* Vorlesungen über Zahlentheorie, 4. Aufl., § 157.

B. Unäre und binäre Formen.

Ich gebe zunächst eine kurze Zusammenstellung der Resultate von Herrn *Hensel* (Kap. XII, § 3—7) im Rahmen der in § 2 entwickelten Bezeichnungen und Methoden. Den einfachen Fall $n = 1$, in dem die Darstellbarkeitskriterien trivial sind, nehme ich der Vollständigkeit halber mit auf.

§ 3. Unäre Formen.

(V) a) S. 133 wird hier durch den Satz erledigt (Kap. XII, § 3):

Satz 1: *Eine binäre Form stellt die Null dann und nur dann in $K(p)$ dar, wenn ihre Invariante d_p der Bedingung $\left(\frac{-d_p}{p}\right) = +1$ genügt* [1]).

(V) b) S. 133 erledigt sich hier leicht mittels des Satzes (IV) S. 133 und der Bemerkung auf S. 131 u. Daraus folgt der triviale

Satz 2: *Eine binäre Form stellt die Null dann und nur dann rational dar, wenn ihre Invariante d der Bedingung $\left(\frac{-d}{p}\right) \equiv +1$ genügt* [2]), *also $d = -1$ ist.*

Die vollständige Antwort auf die Frage (I) S. 129 läßt sich auf dem in § 2 skizzierten Wege aus Satz 2 mittels (IV) S. 133 erschließen, einfacher unmittelbar einsehen. Sie lautet:

Satz 3: *Eine rationale Zahl m $(\neq 0)$ ist dann und nur dann durch eine unäre Form der Invariante d darstellbar, wenn sie der Bedingung $\left(\frac{m}{p}\right) \equiv \left(\frac{d}{p}\right)$ genügt, d. h. wenn m den rationalen Kern d hat.*

§ 4. Darstellbarkeit der Null in $K(p)$ durch ternäre Formen.

(V) a) S. 133 für $n = 2$, d. h. die Frage, wann eine ternäre Form die Null in $K(p)$ darstellt, wird durch Einführung und Auswertung des von Herrn *Hensel* auf p-adische Zahlen verallgemeinerten *Hilbert*schen Symbols beantwortet (Kap. XII, § 4—6). Unter Bezugnahme auf die dort entwickelten Auswertungsregeln für dieses Symbol ergibt sich dann:

---

[1]) Unter dem Symbol $\left(\frac{m}{p}\right)$ verstehe ich im folgenden stets das von Herrn *Hensel* eingeführte verallgemeinerte *Legendre*sche Symbol (dieses Journ. Bd. 147, S. 233 ff.):

$$\left(\frac{m}{p_\infty}\right) = (-1)^\beta, \qquad \text{wenn } m = (-1)^\beta e^\gamma \quad (p_\infty),$$

$$\left(\frac{m}{p}\right) = [(-1)^\alpha, (-1)^\beta], \qquad \text{„ } m = p^\alpha w_p^\beta (1+p)^\gamma \quad (p),$$

$$\left(\frac{m}{2}\right) = [(-1)^\alpha, (-1)^\beta, (-1)^\gamma] \quad \text{„ } m = 2^\alpha (-1)^\beta 5^\gamma \quad (2),$$

das dann und nur dann gleich $+1$ gesetzt wird, wenn alle Teileinheiten $+1$ sind, also m ein p-adisches Quadrat ist. Für beliebiges p-adisches m entsprechen die 2, 4 bzw. 8 möglichen Werte dieses Symbols gerade den 2, 4 bzw. 8 p-adischen Zahlklassen.

[2]) Das Zeichen $\equiv$ bedeutet hier und an allen ähnlichen Stellen stets: für alle p gleich.

Satz 4: *Eine ternäre Form f stellt die Null in $K(p)$ dann und nur dann dar, wenn für irgendeine ihr äquivalente reine Form*

$$f_0 = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2$$

die Einheit

$$\hat{c}_p = \hat{c}_p(f_0) = \left(\frac{-a_1 a_2, -a_1 a_3}{p}\right) \tag{3.}$$

den Wert $+1$ hat.

$\hat{c}_p(f_0)$ ist demnach, ebenso wie die Darstellbarkeit der Null in $K(p)$, eine Invariante gegen p-adische Transformation und Multiplikation von f und kann als $\hat{c}_p(f)$ bezeichnet werden. Zu jeder ternären Form f in $K(1)$ gehört so ein auf alle p erstrecktes System $(\hat{c}_p)$, dessen einzelne Einheiten über die Darstellbarkeit der Null in den einzelnen $K(p)$ entscheiden. Dies System $(\hat{c}_p(f))$ ist invariant gegen rationale Transformation und Multiplikation von f. Es genügt als System von *Hilbert*schen Symbolen der Bedingung:

$$\prod_p \hat{c}_p = +1, \quad \text{(Produktsatz)}. \tag{4.}$$

§ 5. Darstellbarkeit in $K(p)$ durch binäre Formen.

Aus Satz 4 gewinnt Herr *Hensel* mittels des Satzes (IV) S. 133 den

Satz 5: *Zu jeder binären Form f der Invariante d_p gibt es eine Einheit $\check{c}_p = \check{c}_p(f)$, sodaß f alle und nur die p-adischen Zahlen m $(\neq 0)$ darstellt, für die*

$$\left(\frac{m, -d_p}{p}\right) = \check{c}_p$$

ist.

Die Einheit $\check{c}_p(f)$ ist demnach, ebenso wie d_p und die Darstellbarkeit jedes m durch f, invariant gegen p-adische Transformation von f. Sie berechnet sich durch

$$\check{c}_p = \left(\frac{a, -d_p}{p}\right), \tag{5.}$$

wo a irgendeine durch f darstellbare p-adische Zahl, z. B. der Koeffizient eines rein quadratischen Gliedes von f ist.

§ 6. Darstellbarkeit der Null in $K(1)$ durch ternäre Formen.

Ich beweise jetzt den Fundamentalsatz (II) S. 130 für $m = 0$, $n = 3$:

Satz 6: *Eine ternäre Form stellt die Null dann und nur dann rational dar, wenn sie sie in allen $K(p)$ darstellt, d. h. wenn ihr System $(\hat{c}_p)$ der Bedingung*

$$\hat{c}_p \equiv +1$$

genügt.

Beweis [1]**:** Wegen der Invarianz der Darstellbarkeit der Null gegen Transformation und Multiplikation in $K(1)$ darf ich die gegebene Form durch diese beiden Operationen in die Normalform [2])

$$f_0 = -x_0^2 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2$$

---

[1]) Siehe S. 133 Anm. 3.

[2]) Ich wähle hier die von der in § 2 gegebenen Normierung abweichende mit ersten Koeffizienten -1, weil sich das *Hilbert*sche Symbol seiner Definition nach (Kap. XII, § 5, (1a) und (2)) dieser Normierung am einfachsten anpaßt.

gebracht annehmen, wo a_1 und a_2 Kerne aus $K(1)$ sind. Ich habe nur das „dann" des Satzes zu beweisen, setze also voraus, daß f_0 die Null in allen $K(p)$ darstellt, d. h. daß

$$\hat{c}_p(f_0) \equiv \left(\frac{a_1, a_2}{p}\right) \equiv +1 \tag{6.}$$

ist, und weise nach, daß dann die Gleichung

$$f_0 = -x_0^2 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = 0 \tag{7.}$$

in rationalen, nicht sämtlich verschwindenden Zahlen lösbar ist. Ich nenne die positive, ganze Zahl $I = \text{Max.}(|a_1|, |a_2|)$ den Index der Form f_0 und darf offenbar ohne Beschränkung $1 \leqq |a_1| \leqq |a_2|$, also $I = |a_2|$ annehmen.

Ist $I = 1$, also $1 = |a_1| = |a_2|$, so ist wegen (6.) für p_∞ mindestens einer der beiden Koeffizienten, etwa $a_1 = +1$. Dann ist $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$; kurz $(1, 1, 0)$ eine nicht identische Lösung von (7.).

Ist aber $I > 1$, so zeige ich, daß man entweder eine Lösung von (7.) direkt angeben kann, oder daß sich aus f_0 durch rationale Transformation und Multiplikation eine ebenso gebaute Form f_0' von kleinerem Index I' herleiten läßt. Wegen der Transformations- und Multiplikations-Invarianz des Systems $(\hat{c}_p(f_0))$ und der Darstellbarkeit der Null ist dann die Behauptung nur noch für die Form f_0' zu beweisen. Auf f_0' kann ich dasselbe Verfahren anwenden und komme so schließlich auf den Index 1, für den die Behauptung eben schon bewiesen ist.

Bei der Überführung von f_0 in eine Form f_0' von kleinerem Index unterscheide ich die beiden für $I > 1$ einzig möglichen Fälle:

$$\text{a)}\ 1 < |a_1| = |a_2|, \quad \text{b.)}\ 1 \leqq |a_1| < |a_2|.$$

a.) $1 < |a_1| = |a_2|$.

Wegen (6.) für p_∞ ist entweder $a_1 = -a_2$; dann ist $(0, 1, 1)$ eine nicht identische Lösung von (7.). Oder es ist $a_1 = a_2$ und positiv. Dann geht f_0 durch Multiplikation mit $-a_2$ und Transformation über in die Form

$$\bar{f}_0 = -\bar{x}_0^2 - \bar{x}_1^2 + a_2 \bar{x}_2^2,$$

die zwar noch denselben Index $I = |a_2|$ hat, aber wegen $|a_2| > 1$ unter b.) fällt.

b.) $1 \leqq |a_1| < |a_2|$.

Aus der Voraussetzung (6.) folgt die Existenz einer ganzzahligen Lösung der Kongruenz

$$u^2 \equiv a_1 \bmod a_2. \tag{8.}$$

Denn (8.) ist

1. für alle ungeraden, in a_1 nicht enthaltenen, (n. Vor. notwendig einfachen) Primfaktoren q_i von a_2 als Modul wegen
$$\left(\frac{a_1, a_2}{q_i}\right) = \left(\frac{a_1}{q_i}\right) = +1 \quad \text{(Gl. (6.))},$$
2. für alle gemeinsamen Teiler p_i von a_1 und a_2 als Modul durch die Nullklasse mod. p_i,
3. für die in a_2 höchstens in erster Potenz enthaltene 2 als Modul durch die Null- oder Einsklasse (je nachdem a_1 gerade oder ungerade)

lösbar, und da alle Primfaktoren von a_2 verschieden sind, lassen sich die Lösungen

der Teilkongruenzen nach den einzelnen in a_2 enthaltenen Primzahlmoduln zu einer Lösung u mod. a_2 von (8.) zusammensetzen.

Ich wähle den Repräsentanten u, (der auch Null sein kann), aus dem absolut kleinsten Restsystem mod. a_2, also

$$|u| \leqq \frac{|a_2|}{2} \tag{9.}$$

und kann dann setzen:

$$u^2 - a_1 = a_2\, a_2' \tag{10.}$$

mit ganzzahligem a_2'. Ist $a_2' = 0$ oder ein rationales Quadrat, so stellt schon (10.) eine nicht identische Lösung von (7.) dar. Ist dies aber nicht der Fall, so erhält man aus f_0 durch die Substitution

$$\begin{pmatrix} u & a_1 & 0 \\ 1 & u & 0 \\ 0 & 0 & a_2' \end{pmatrix}$$

mit der Determinante $(u^2 - a_1)\, a_2' = a_2\, a_2'^2 \neq 0$ und anschließende Division mit $a_2\, a_2'$ $(\neq 0)$ nach leichter Rechnung die neue Form:

$$f_0' = -\, x_0'^2 + a_1\, x_1'^2 + a_2'\, x_2'^2.$$

Der Index I' von f_0' ist kleiner als der Index $I = |a_2|$ von f_0 (und wird durch Befreiung des ganzzahligen a_2' von ev. quadratischen Faktoren höchstens verkleinert). Denn es ist

einerseits: $|a_1| < |a_2| = I$ nach b.),

andererseits: $|a_2'| \leqq \dfrac{u^2 + |a_1|}{|a_2|}$ nach (10.),

$< \dfrac{|a_2|}{4} + 1$ nach (9.) und b.),

$< |a_2|$, da nach b.) $|a_2| > 1$ ist.

Damit ist nach dem schon Bemerkten Satz 6 bewiesen.

§ 7. Darstellbarkeit in $K(1)$ durch binäre Formen.

Aus Satz 6 folgt nach (IV) S. 133 sofort die Gültigkeit des Fundamentalsatzes (II) S. 130 für die Darstellbarkeit beliebiger Zahlen m (inkl. Null (§ 3)) durch binäre Formen. Damit ergeben sich aus den Darstellbarkeitskriterien für die einzelnen $K(p)$ des Satzes 5 (S. 135) sofort folgende Kriterien für die Darstellbarkeit in $K(1)$ durch binäre Formen:

Satz 7: *Zu einer binären Form f der Invariante d gibt es ein auf alle p erstrecktes System von Einheiten $(\check{c}_p) = (\check{c}_p(f))$, sodaß f alle und nur die rationalen Zahlen m $(\neq 0)$ rational darstellt, für die*

$$\left(\frac{m, -d}{p}\right) \equiv \check{c}$$

ist.

Dies System $(\check{c}_p(f))$ ist demnach, ebenso wie d und die rationale Darstellbarkeit jedes m durch f, invariant gegen rationale Transformation von f. Es berechnet sich nach (5.) S. 135 durch

$$\check{c}_p \equiv \left(\frac{a, -d}{p}\right), \tag{11.}$$

wo a irgendeine durch f rational darstellbare Zahl, z. B. der Koeffizient eines rein quadratischen Gliedes von f ist.

Für das System (11.) von *Hilbert*schen Symbolen folgen aus den für dieses Symbol bestehenden Gesetzen folgende beiden Bedingungen:

$$(12.) \qquad \prod_p \check{c}_p = +1, \text{ (Produktsatz)},$$

$$(13.) \qquad \check{c}_p = +1 \text{ für } \left(\frac{-d}{p}\right) = +1,$$

denen das System von Invarianten d und $(\check{c}_p)$ einer binären Form genügt.

Aus Satz 7 ergibt sich, daß die von Herrn *Hensel* in Kap. XII, § 7 hergeleiteten arithmetischen Reihen für alle durch eine binäre Form in allen $K(p)$ gleichzeitig („überall") darstellbaren Kerne genau die gleiche Bedeutung für die rationale Darstellbarkeit haben. Läßt man die von Herrn *Hensel* a. a. O. eingeführte Beschränkung auf zu $2d$ prime dargestellte Kerne fallen, so kann man mit wenig Abänderungen im Beweis folgenden allgemeineren Satz aufstellen:

Satz 8: *Durch eine binäre Form der Invarianten d, $(\check{c}_p)$ sind alle und nur die rationalen Zahlen m $(\neq 0)$ rational darstellbar, deren Kern einem durch d und $(\check{c}_p)$ bestimmten System von arithmetischen Reihen ein- und derselben Differenz angehört und keinen einzigen derjenigen (unendlich vielen [1])) ungeraden Primfaktoren p_i enthält, für die $\left(\frac{-d}{p_i}\right) = [+1, -1]$ und gleichzeitig $\check{c}_{p_i} = +1$ ist. Hierbei sind die genannten Reihen für positives d auf das Vorzeichen $\check{c}_{p_\infty}$ zu beschränken, während für negatives d keine Vorzeichenbeschränkung zu machen ist.*

Schließlich ergibt sich aus Satz 7 noch speziell, daß einzig und allein für $d = -1$ alle rationalen Zahlen rational darstellbar sind.

Denn für jedes andere d ist $-d$ in mindestens einem Körper $K(p)$ Nichtquadratzahl; für einen solchen $K(p)$ genügt aber nach Kap. XII, S. 328 f. nur die Hälfte aller p-adischen Zahlen m der Bedingung von Satz 7, sodaß es sicher rationale Zahlen m gibt, die in diesem $K(p)$ nicht darstellbar sind, also auch nicht in $K(1)$. Ist dagegen $d = -1$, so ist identisch: $\check{c}_p \equiv \left(\frac{a, +1}{p}\right) \equiv +1$, und die Bedingung von Satz 7 für jedes rationale m $(\neq 0)$ erfüllt. In Verbindung mit Satz 2 (S. 134) erhalten wir also:

Satz 9: *Eine binäre Form stellt dann und nur dann alle rationalen Zahlen und dann und nur dann auch die Null rational dar, wenn ihre Invariante $d = -1$ ist.*

C. Ternäre Formen.

Der Gang der Untersuchung ist genau derselbe wie im vorhergehenden Abschnitt B. Zunächst stelle ich gemäß (V) a.) S. 133 $(n = 3)$ die Kriterien für die Darstellbarkeit der Null in $K(p)$ durch quaternäre Formen auf (§ 8) und erhalte daraus mittels (IV) S. 133 die Kriterien für die Darstellbarkeit in $K(p)$ durch ternäre Formen (§ 9). Dann beweise ich gemäß (V) b.) $(n = 3)$ den Fundamentalsatz (II) S. 130 für

[1]) Außer für $d = -1$, wo die p_i überhaupt nicht auftreten (siehe Satz 9).

die Darstellbarkeit der Null durch quaternäre Formen (§ 10) und erhalte damit die Kriterien für die Darstellbarkeit in $K(p)$ durch ternäre Formen (§ 11).

§ 8. Darstellbarkeit der Null in $K(p)$ durch quaternäre Formen.

Die Darstellbarkeitskriterien sind vollständig in den folgenden beiden Sätzen 10 und 11 enthalten:

Satz 10: *Eine quaternäre Form stellt die Null in $K(p)$ stets dar, wenn ihre Invariante $d_p \neq +1$ ist.*

Beweis: Wegen der Invarianz von d_p sowohl als auch der Darstellbarkeit der Null in $K(p)$ gegen p-adische Transformation und Multiplikation brauche ich den Satz nur für normierte reine Kernformen in $K(p)$ zu beweisen.

a.) $p = p_\infty$.

Hier ist ohne weiteres klar, daß die beiden einzigen normierten reinen Kernformen in $K(p_\infty)$, deren Invariante $d_{p_\infty} \neq +1$, also $= -1$ ist, nämlich:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 \quad \text{und} \quad x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$$

die Null in $K(p_\infty)$ darstellen.

b.) ungerades p.

Sei

$$f_0 = x_0^2 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2; \quad a_i = p^{\alpha_i} w_p^{\beta_i}; \qquad (\alpha_i, \beta_i = 0 \text{ oder } 1)$$

eine normierte reine Kernform in $K(p)$ und ihr $d_p \neq +1$, also

$$\left(\frac{d_p}{p}\right) = \left(\frac{a_1 a_2 a_3}{p}\right) \neq +1 . \tag{14.}$$

Ist dann

1.) $d_p = p$ oder $p\, w_p$,

so ist $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \equiv 1 \bmod 2$, also das System $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 1)$ oder $(1, 1, 1)$, wenn die willkürliche Reihenfolge entsprechend gewählt wird. Im ersten Falle folgt dann aus

$$\left(\frac{-a_1, -a_2}{p}\right) = \left(\frac{-w_p^{\beta_1}, -w_p^{\beta_2}}{p}\right) = +1\ ^{1}),$$

daß die x_0, x_1, x_2 entsprechende ternäre Teilform von f_0 die Null in $K(p)$ darstellt, im zweiten Falle ebenso wegen

$$\left(\frac{-a_1 a_2, -a_1 a_3}{p}\right) = \left(\frac{-w_p^{\beta_1+\beta_2}, -w_p^{\beta_1+\beta_3}}{p}\right) = +1,$$

die x_1, x_2, x_3 entsprechende ternäre Teilform, also in beiden Fällen auch f_0.

Ist aber

2.) $d_p = w_p$,

so ist $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \equiv 0 \bmod 2$, also nach (14.) sicher $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \equiv 1 \bmod 2$. Dann kommen bei passend gewählter Reihenfolge nur die durch ihre Koeffizienten angedeuteten Formentypen:

$$\begin{array}{ll} (1,\ 1,\ 1,\ w_p) & (1,\ 1,\ p,\ p\,w_p) \\ (1,\ w_p,\ w_p,\ w_p) & (1,\ w_p,\ p,\ p\ \ ) \\ & (1,\ w_p,\ p\,w_p,\ p\,w_p) \end{array}$$

---

[1]) Kap. XII, § 5, Gl. (5).

in Frage. Jeder dieser fünf Typen ist von der Gestalt $t_1\,(1,1) + t_2\,(1, w_p)$, wo in dieser ohne weiteres verständlichen, symbolischen Schreibweise t_1 und t_2 p-adische Kerne bezeichnen. Da nach Satz 1 (S. 134) der binäre Typus $(1,1)$ für $p \equiv 1 \bmod 4$, der binäre Typus $(1, w_p)$ für $p \equiv 3 \bmod 4$ die Null in $K(p)$ darstellt, ist die Null für alle ungeraden p durch jeden der genannten fünf quaternären Typen darstellbar, w. z. b. w.

c.) $p = 2$.

Es sei

$$f_0 = x_0^2 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2;\ a_i = 2^{\alpha_i}\,(-1)^{\beta_i} 5^{\gamma_i};\quad (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i = 0 \text{ oder } 1)$$

eine normierte reine Kernform in $K(2)$ und $d_2 \neq +1$, also

$$\left(\frac{d}{2}\right) = \left(\frac{a_1\, a_2\, a_3}{2}\right) \neq +1. \tag{15.}$$

Dann zeige ich, daß es einen dyadischen Kern $m = 2^{\alpha}\,(-1)^{\beta} 5^{\gamma}$ gibt, sodaß

$$m = x_0^2 + a_1 x_1^2 = -\,a_2 x_2^2 - a_3 x_3^2 \quad (2) \tag{16.}$$

ist. Dann ist offenbar die Null in $K(2)$ durch f_0 darstellbar. Nach Satz 5 (S. 135) ist zum Erfülltsein von (16.) notwendig und hinreichend, daß die Bedingungen:

$$\left(\frac{m,\ -a_1}{2}\right) = \left(\frac{1,\ -a_1}{2}\right) = +1 \text{ und } \left(\frac{m,\ -a_2\, a_3}{2}\right) = \left(\frac{-a_2,\ -a_2\, a_3}{2}\right) \tag{17.}$$

für ein dyadisches m gleichzeitig bestehen. Durch Einsetzen der dyadischen Darstellungen für m und die a_i, Auswertung der *Hilbert*schen Symbole [1]) und Vergleichung der beiderseitigen Exponenten von -1 erhält man aus (17.) die Bedingungen:

$$\begin{cases} \alpha\,\gamma_1 + \beta\,(\beta_1+1) + \gamma\,\alpha_1 \equiv 0 \bmod 2, \\ \alpha\,(\gamma_2+\gamma_3) + \beta\,(\beta_2+\beta_3+1) + \gamma\,(\alpha_2+\alpha_3) \equiv \alpha_2\,(\gamma_2+\gamma_3) \\ \qquad + (\beta_2+1)\,(\beta_2+\beta_3+1) \\ \qquad + \gamma_2\,(\alpha_2+\alpha_3) \bmod 2. \end{cases} \tag{18.}$$

Sind diese Bedingungen durch ein Exponentensystem (α, β, γ) erfüllbar, so besteht (16.) mit $m = 2^{\alpha}\,(-1)^{\beta} 5^{\gamma}$, und f_0 stellt die Null in $K(2)$ dar.

Ist nun

$$1.)\quad d_2 = 2^{1}\,(-1)^{\bar\beta} 5^{\bar\gamma},$$

so ist $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \equiv 1 \bmod 2$, also bei passend gewählter Reihenfolge $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1,0,0)$ oder $(1,1,1)$. In beiden Fällen werden die Bedingungen (18.) durch das Exponentensystem:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &\equiv \alpha_2 \\ \beta &\equiv \beta_2 + 1 \\ \gamma &\equiv \alpha_2\,\gamma_1 + (\beta_2+1)\,(\beta_1+1) \end{aligned}\right\} \bmod 2$$

erfüllt.

Ist ferner

$$2.)\quad d_2 = 2^{\bar\alpha}\,(-1)^{\bar\beta} 5^{1},$$

so gilt wegen der Symmetrie der Bedingungen (18.) in den α und γ ganz entsprechendes.

Liegt schließlich weder 1.) noch 2.) vor, so ist nach (15.) notwendig

$$3.)\quad d_2 = 2^{0}\,(-1)^{1} 5^{0},$$

---

[1]) Kap. XII. § 7, Gl. (8).

also bei passend gewählter Reihenfolge $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (1, 0, 0)$ oder $(1, 1, 1)$. In beiden Fällen werden dann die Bedingungen (18.) durch das Exponentensystem:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &\equiv 0 \\ \beta &\equiv (\beta_2 + 1) + \alpha_2 (\gamma_2 + \gamma_3) + \gamma_2 (\alpha_2 + a_3) \\ \gamma &\equiv 0 \end{aligned}\right| \text{ mod. } 2$$

erfüllt.

Damit ist Satz 10 vollständig bewiesen. Für den in Satz 10 ausgeschlossenen Fall $d_p = +1$ beweise ich:

Satz 11: *Eine quaternäre Form f, deren Invariante $d_p = +1$ ist, stellt die Null in $K(p)$ dann und nur dann dar, wenn in irgendeiner (und damit in jeder) ihr in $K(p)$ äquivalenten Form der besonderen Gestalt $f_0 = a_1 x_1^2 + \varphi(x_2, x_3, x_4)$ die Einheit $\hat{c}_p(\varphi) = +1$ ist.*

Beweis: Ist $\hat{c}_p(\varphi) = +1$, so stellt nach Satz 4 (S. 135) schon die ternäre Teilform φ, also auch f_0 und f die Null in $K(p)$ dar. Stellt umgekehrt f und somit f_0 die Null in $K(p)$ dar, so gilt dies auch für die in $K(p)$ äquivalente Form

$$f_0 = a_1 x_1^2 + \varphi_0(x_2, x_3, x_4) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2,$$

die durch Transformation von φ in eine in $K(p)$ äquivalente reine Form φ_0 entsteht. Wie im Beweis des vorigen Satzes besteht dann eine Gleichung:

$$(19.) \qquad m = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = -a_3 x_3^2 - a_4 x_4^2 \quad (p),$$

in der alle $x_i \neq 0$ angenommen werden dürfen (S. 132 u.). Ist $m = 0$, so darf man an seine Stelle ein anderes von Null verschiedenes m gesetzt denken; (denn aus Satz 1 (S. 134) und 5 (S. 135) ergibt sich leicht, daß dann die beiden binären Formen in (19.) alle p-adischen Zahlen darstellen). Für das Bestehen von (19.) mit $m \neq 0$ ist aber notwendig (Satz 5), daß die beiden Bedingungen:

$$(20.) \quad \left(\frac{m, -a_1 a_2}{p}\right) = \left(\frac{a_1, -a_1 a_2}{p}\right) \text{ und } \left(\frac{m, -a_3 a_4}{p}\right) = \left(\frac{-a_3, -a_3 a_4}{p}\right)$$

für dies m gleichzeitig bestehen. Nun ist nach Voraussetzung $d_p = +1$, also $\left(\frac{d_p}{p}\right) = \left(\frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{p}\right) = +1$ und daher $\left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right) = \left(\frac{-a_3 a_4}{p}\right)$. Die beiden Bedingungen (20.) können also nur dann ohne Widerspruch zusammen bestehen, wenn

$$\left(\frac{a_1, -a_1 a_2}{p}\right) = \left(\frac{-a_3, -a_1 a_2}{p}\right),$$

d. h.

$$\left(\frac{-a_1 a_3, -a_1 a_2}{p}\right) = +1$$

ist. Dann ist aber $\hat{c}_p(\varphi_0) = \hat{c}_p(\varphi) = +1$ (Satz 4, S. 135). Damit ist gezeigt, daß für eine beliebige (also für jede) zu f in $K(p)$ äquivalente Form der besonderen Gestalt f_0 des Satzes die Einheit $\hat{c}_p(\varphi) = +1$ ist, und somit der Satz bewiesen.

§ 9. Darstellbarkeit in $K(p)$ durch ternäre Formen.

Aus den beiden letzten Sätzen 10 und 11 ergibt sich jetzt leicht:

Satz 12: *Eine ternäre Form der Invariante d_p stellt in $K(p)$ entweder alle p-adischen Zahlklassen, oder alle außer der p-adischen Zahlklasse von $-d_p$ dar, je nachdem ihre Invariante $\hat{c}_p$ den Wert $+1$ oder -1 hat.*

Beweis: Nach (IV) (S. 133) ist das System aller durch eine ternäre Form f in $K(p)$ darstellbaren p-adischen Zahlklassen identisch mit dem System derjenigen p-adischen Zahlklassen m, für die die quaternäre Form

$$F = f(x_1, x_2, x_3) - mx^2$$

die Null in $K(p)$ darstellt. Ist nun $\hat{c}_p = +1$, so stellt schon f (Satz 4, S. 135), also auch F für jede p-adische Zahlklasse m die Null in $K(p)$ dar. Ist aber $\hat{c}_p = -1$, so stellt F nach den Sätzen 10, 11 die Null dann und nur dann in $K(p)$ dar, wenn ihre Invariante $d'_p \neq +1$, d. h. wegen $\left(\frac{d'_p}{p}\right) = \left(\frac{-m d_p}{p}\right)$, wenn $\left(\frac{m}{p}\right) \neq \left(\frac{-d_p}{p}\right)$ ist, w. z. b. w.

Aus Satz 12 folgt speziell unter Berücksichtigung von Satz 4 (S. 135):

Satz 13: *Eine ternäre Form stellt dann und nur dann alle p-adischen Zahlen und dann und nur dann die Null in $K(p)$ dar, wenn ihre Invariante $\hat{c}_p = +1$ ist.*

§ 10. Darstellbarkeit der Null in $K(1)$ durch quaternäre Formen.

Ich beweise jetzt den Fundamentalsatz (II) (S. 130) für $m = 0$, $n = 4$:

Satz 14: *Eine quaternäre Form stellt die Null dann und nur dann rational dar, wenn sie sie in allen $K(p)$ darstellt.*

Beweis: Ich habe nur das „dann" des Satzes zu beweisen und darf mich auf reine Kernformen in $K(1)$ beschränken. Ich setze also voraus, daß die Form

$$f_0 = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2$$

mit ganzen, quadratfreien a_k die Null in allen $K(p)$ darstellt. Dann besteht in jedem $K(p)$ eine Gleichung:

$$(21.) \qquad m_p = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = -a_3 x_3^2 - a_4 x_4^2 \ (p),$$

in der man (wie in (19.) S. 141) $m_p \neq 0$ als p-adischen Kern voraussetzen darf. Ich zeige, daß man dann ein rationales m ($\neq 0$) finden kann, das durch die beiden binären Formen in (21.) rational darstellbar ist. Dann stellt f_0 die Null rational dar.

Bezeichnet p_i jeden ungeraden Teiler der a_k, und ist für $p = 2$, p_i, p_∞ bezw.:

$$\begin{aligned} m_2 &= 2^\alpha (-1)^\beta 5^\gamma; \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0 \text{ oder } 1), \\ m_{p_i} &= p_i^{\alpha_i} w_{p_i}^{\beta_i} \quad ; \quad (\alpha_i, \beta_i = 0 \text{ oder } 1), \\ m_{p_\infty} &= (-1)^\delta \quad ; \quad (\delta = 0 \text{ oder } 1), \end{aligned}$$

so unterscheiden sich alle rationalen Zahlen m, die gleichzeitig den Bedingungen:

$$(22.) \qquad \begin{cases} m \equiv m_2 \equiv 2^\alpha (-1)^\beta 5^\gamma \bmod 2^\alpha \cdot 8, \\ m \equiv m_{p_i} \equiv p_i^{\alpha_i} w_{p_i}^{\beta_i} \bmod p_i^{\alpha_i} \cdot p_i, \\ \text{sgn. } m = m_{p_\infty} = (-1)^\delta \end{cases}$$

genügen, von jedem der genannten m_p nur um eine p-adische Quadratzahl, sind also gleichzeitig in $K(2)$, $K(p_\infty)$ und den $K(p_i)$ durch die beiden binären Formen in (21.) darstellbar. Die Bedingungen (22.) lassen sich in die beiden einzigen, ihnen völlig gleichwertigen

$$(23.) \qquad \begin{cases} m \equiv 2^\alpha \prod_i p_i^{\alpha_i} A \bmod 2^{\alpha+3} \prod_i p_i^{\alpha_i+1}, \\ \text{sgn. } m = (-1)^\delta \end{cases}$$

zusammenziehen, wo A eine durch die rechten Seiten von (22.) bestimmte, zu $2 \prod_i p_i$ prime ganze Zahl ist. Bestimmt man dann, was nach dem *Dirichlet*schen Satz sicher möglich, eine positive Primzahl $P \equiv (-1)^\delta A \bmod. 2^3 \prod_i p_i$, so genügt die ganze Zahl $m = (-1)^\delta 2^a \prod_i p_i^{a_i} P$ beiden Bedingungen (23.), ist also in $K(2)$, $K(p_\infty)$ und den $K(p_i)$ durch die beiden binären Formen in (21.) darstellbar. Dasselbe gilt auch für alle übrigen $K(p)$. Denn die nach Satz 5 (S. 135) für die Darstellbarkeit von m in $K(p)$ notwendigen und hinreichenden Bedingungen:

$$\left(\frac{m,\ a_1\,a_2}{p}\right) = \left(\frac{a_1,\ -\,a_1\,a_2}{p}\right) \text{ und } \left(\frac{m,\ -\,a_3\,a_4}{p}\right) = \left(\frac{-\,a_3,\ -\,a_3\,a_4}{p}\right)$$

sind für alle übrigen p außer P von selbst erfüllt, da diese p nicht in m und den a_i aufgehen, müssen also nach dem Produktsatz für das *Hilbert*sche Symbol auch für die allein noch übrige Primzahl P bestehen. Dann ist aber m nach Satz 7 (S. 137) durch die beiden binären Formen in (21.) rational darstellbar, und damit Satz 14 bewiesen.

Für die Darstellbarkeit der Null in $K(1)$ durch quaternäre Formen erhält man somit folgendes Kriterium:

Satz 15: *Eine quaternäre Form der Invariante d stellt die Null dann und nur dann rational dar, wenn in irgendeiner ihr rational-äquivalenten Form der besonderen Gestalt* $f_0 = a_1 x_1^2 + \varphi(x_2, x_3, x_4)$

$$\text{(24.)} \qquad \hat{c}_p(\varphi) = +1 \text{ für } \left(\frac{d}{p}\right) = +1$$

ist.

Denn dann und nur dann ist nach den Sätzen 10 und 11 (S. 139 und 141) die Null in jedem $K(p)$ darstellbar.

§ 11. Darstellbarkeit in $K(1)$ durch ternäre Formen.

Aus Satz 14 folgt nach (IV) S. 133 sofort die Gültigkeit des Fundamentalsatzes (II) S. 130 für die Darstellbarkeit beliebiger Zahlen m [inkl. Null (Satz 6, S. 135)] durch ternäre Formen. Damit ergeben sich aus den Darstellbarkeitskriterien für die einzelnen $K(p)$ des Satzes 12 (S. 141) sofort folgende Kriterien für die Darstellbarkeit in $K(1)$ durch ternäre Formen:

Satz 16: *Damit eine rationale Zahl* $m\ (\neq 0)$ *durch eine ternäre Form mit den Invarianten d und* $(\hat{c}_p)$ *rational darstellbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß m den Bedingungen*

$$\left(\frac{m}{p}\right) \neq \left(\frac{-\,d}{p}\right) \text{ für } \hat{c}_p = -1$$

genügt, d. h. für keinen der (endlich vielen) Bereiche $K(p)$, *für die* $\hat{c}_p = -1$ *ist, zur p-adischen Klasse von* $-d$ *gehört.*

Speziell ergibt sich aus Satz 13 (S. 142):

Satz 17: *Eine ternäre Form stellt dann und nur dann alle rationalen Zahlen und dann und nur dann die Null rational dar, wenn ihr Invariantensystem* $(\hat{c}_p)$ *der Bedingung* $\hat{c}_p \equiv +1$ *genügt.*

Ich will noch das System aller durch eine ternäre Form rational darstellbaren Zahlen ähnlich charakterisieren, wie in Satz 8 (S. 138) für binäre Formen.

Es handelt sich darum, das System aller den Bedingungen von Satz 16 genügenden rationalen Zahlen aufzustellen. Dabei darf man sich auf die allein maßgebenden rationalen Kerne beschränken. Bezeichne p_i jede der (endlich vielen) ungeraden Primzahlen, für die $\hat{c}_{p_i} = -1$ ist. Dann darf ein rational darstellbares m nicht zur p_i-adischen Klasse von $-d$ gehören, ist also auf ein durch d bestimmtes Tripel von p_i-adischen Zahlklassen zu beschränken. Nun gehören bekanntlich alle und nur diejenigen rationalen Kerne m, die resp. den Kongruenzen:

$m \equiv (\alpha_{p_i})$ mod. p_i genügen, zur p-adischen Zahlklasse von 1
$m \equiv (\beta_{p_i})$ mod. p_i „ „ „ „ „ w_{p_i}
$m \equiv p_i(\alpha_{p_i})$ mod. p_i^2 „ „ „ „ „ p_i
$m \equiv p_i(\beta_{p_i})$ mod. p_i^2 „ „ „ „ „ $p_i w_{p_i}$.

Dabei bezeichnen (α_{p_i}) und (β_{p_i}) vollständige Systeme von $\frac{p_i - 1}{2}$ inkongruenten quadratischen Resten bezw. Nichtresten mod. p_i. Das genannte Tripel läßt sich demnach durch

(25.) $$m \equiv (A_{p_i}) \text{ mod. } p_i^2$$

charakterisieren, wo (A_{p_i}) ein durch d bestimmtes System von ganzen Zahlen mod. p_i^2 bezeichnet.

Für $p = 2$ gehört ein rationaler Kern

$$m = 2^\alpha (-1)^\beta 5^{\bar{\gamma}}; \qquad (\alpha, \beta = 0 \text{ oder } 1;\ \bar{\gamma} = \gamma + 2\gamma_1 + 2^2\gamma_2 + \cdots)$$

zur dyadischen Zahlklasse $2^\alpha (-1)^\beta 5^\gamma$, und es ist

$$m \equiv 2^\alpha (-1)^\beta 5^\gamma \text{ mod. } 2^\alpha \cdot 8,$$

sodaß die Zugehörigkeit des Kernes m zu einer der acht dyadischen Zahlklassen aus seinem Kongruenzwert mod. $2^\alpha \cdot 8$, in jedem Falle also mod. 16 erschlossen werden kann. Man erhält somit hier für die darstellbaren Kerne m eine Bedingung der Form:

(26.) $$m \equiv (A_2) \text{ mod. } 16,$$

wo (A_2) ein durch d und $\hat{c}_2$ bestimmtes System ganzer Zahlen mod. 16, (für $\hat{c}_2 = +1$, wo keine Beschränkung auftritt, das System $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 7$ aller höchstens durch 2^1 teilbaren Zahlen mod. 16), bezeichnet.

Für p_∞ ergibt sich schließlich die Bedingung:

(27.) $$\text{sgn. } m = \text{sgn. } d$$

oder überhaupt keine Bedingung, je nachdem $\hat{c}_{p_\infty} = -1$ oder $+1$ ist.

Die Bedingungen (25.) und (26.) lassen sich in die eine einzige völlig gleichwertige

(28.) $$m \equiv (A) \text{ mod. } 16 \prod_i p_i^2$$

zusammenziehen, wo (A) ein durch (A_2) und die (A_{p_i}), also durch d und $(\hat{c}_p)$ bestimmtes System von ganzen Zahlen mod. $16 \prod_i p_i^2$ ist. Zusammenfassend ergibt sich somit:

Satz 18: *Durch eine ternäre Form der Invarianten d und $(\hat{c}_p)$ sind alle und nur die rationalen Zahlen rational darstellbar, deren Kern einem durch d und $(\hat{c}_p)$ bestimmten System von arithmetischen Reihen* (28.) *ein- und derselben Differenz an-*

gehört; dabei sind diese Reihen auf das Vorzeichen von d zu beschränken oder nicht, je nachdem $\hat{c}_{p\infty} = -1$ *oder* $+1$ *ist.*

Beispiele.

Ich gebe zu den Sätzen über die rationale Darstellbarkeit durch ternäre Formen einige Zahlenbeispiele. Dabei charakterisiere ich die darstellbaren Zahlen der Einfachheit halber durch Angabe der nicht darstellbaren, da die Aufstellung der arithmetischen Reihen (28.) für die darstellbaren Zahlen auf große Zahlen führt und die Übersicht erschwert.

1.) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

$d = 1$; $\hat{c}_2, \hat{c}_{p_\infty} = -1$; alle übrigen $\hat{c}_p = +1$.

Rational darstellbar sind alle rationalen Zahlen, deren Kern positiv (Gl. (27.)) und nicht von der Form $8n + 7$ (dyadische Klasse von $-d = -1$) ist.

2.) $f = x_1^2 - 3x_2^2 + 7x_3^2$.

$d = -21$; $\hat{c}_3, \hat{c}_7 = -1$; alle übrigen $\hat{c}_p = +1$.

Rational darstellbar sind alle rationalen Zahlen, deren Kern von keiner der beiden Formen $3(3n + 1)$ (triadische Klasse von $-d = 21$) und $7(7n + 3, 5, 6)$ (heptadische Klasse von 21) ist.

3.) $f = x_1^2 + x_2^2 + 42x_3^2$.

$d = 42$; $\hat{c}_2, \hat{c}_3, \hat{c}_7, c_{p_\infty} = -1$; alle übrigen $\hat{c}_p = +1$. Rational darstellbar sind alle rationalen Zahlen, deren Kern positiv und von keiner der Formen $2(8n + 3)$ (dyadische Klasse von $-d = -42$), $3(3n + 1)$ (triadische Klasse von -42), $7(7n + 1, 2, 4)$ (heptadische Klasse von -42) ist.

4.) $f = x_1^2 + 3x_2^2 - 7x_3^2$.

$d = -21$; $\hat{c}_p \equiv +1$.

Rational darstellbar sind Null und alle rationalen Zahlen.

D. n-äre Formen ($n \geqq 4$).

Der Gang der Untersuchungen ist wieder genau derselbe wie in Abschnitt B. und C., nur daß hier alles wesentlich einfacher wird.

§ 12. Darstellbarkeit in $K(p)$ durch n-äre Formen ($n \geqq 4$).

Die Darstellbarkeitskriterien für die Null in $K(p)$ sind vollständig in folgendem Satz enthalten:

Satz 19: *Eine n-äre Form* ($n \geqq 5$) [1]) *stellt die Null in jedem „endlichen" $K(p)$ dar, in $K(p_\infty)$ dann und nur dann, wenn sie indefinit ist.*

Beweis: Ich darf mich zum Beweis auf reine Formen beschränken. Für $K(p_\infty)$ ist dann die Behauptung ohne weiteres klar (Kap. XII, § 2). Für endliches p brauche ich den Satz nur für $n = 5$ zu zeigen, dann folgt seine Gültigkeit für $n > 5$ nach dem Teilformenprinzip (S. 133 u.) ohne weiteres.

[1]) Für $n = 4$ siehe Satz 10, 11 (S. 139 u. 141).

Ist nun

$$f_0 = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 + a_5 x_5^2$$

eine reine quinäre Form, so hat entweder eine ihrer quaternären Teilformen eine von $+1$ verschiedene Invariante d_p; dann stellt diese Teilform und somit f_0 die Null in $K(p)$ dar (Satz 10, S. 139). Oder aber die Invarianten d_p aller fünf quaternären Teilformen von f_0 sind $+1$. Dann folgt aus

$$\left(\frac{a_1\, a_2\, a_3\, a_4}{p}\right) = \left(\frac{a_1\, a_2\, a_3\, a_5}{p}\right) = \left(\frac{a_1\, a_2\, a_4\, a_5}{p}\right) = \left(\frac{a_1\, a_3\, a_4\, a_5}{p}\right) = \left(\frac{a_2\, a_3\, a_4\, a_5}{p}\right) = +1,$$

daß

$$\left(\frac{a_1}{p}\right) = \left(\frac{a_2}{p}\right) = \left(\frac{a_3}{p}\right) = \left(\frac{a_4}{p}\right) = \left(\frac{a_5}{p}\right),$$

f_0 also einem Multiplum von

$$f_0' = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$$

in $K(p)$ äquivalent ist. Ist p ungerade, so stellt schon die ternäre Form $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, also auch f_0' und f_0, die Null in $K(p)$ dar (Satz 4, S. 135). Für $p = 2$ ist f_0' wegen $\left(\frac{+1}{2}\right) = \left(\frac{-7}{2}\right)$ in $K(2)$ äquivalent zu

$$f_0'' = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 7\, x_5^2,$$

und die Gleichung $f_0'' = 0$ (2) wird durch das Wertsystem $(1, 1, 1, 2, 1)$ für die x_i erfüllt.

Aus dem damit bewiesenen Satz 19 ergeben sich mittels (IV) S. 133 sofort folgende allgemeine Darstellbarkeitskriterien für $K(p)$:

Satz 20: *Eine n-äre Form ($n \geqq 4$) stellt in jedem endlichen $K(p)$ alle (von Null verschiedenen) p-adischen Zahlen dar, in $K(p_\infty)$ alle oder nur alle $\left\{\begin{matrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{matrix}\right\}$ Zahlen, je nachdem sie indefinit oder $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ definit ist.*

§ 13. Darstellbarkeit in $K(1)$ durch n-äre Formen ($n \geqq 4$).

Die Darstellbarkeitskriterien für die Null in $K(1)$ sind vollständig in folgendem Satz (Fundamentalsatz (II) S. 130, für $m = 0$; $n \geqq 5$) enthalten:

Satz 21: *Eine n-äre Form ($n \geqq 5$) stellt die Null dann und nur dann rational dar, wenn sie sie in allen $K(p)$ darstellt, d. h. nach Satz 19 (S. 145), wenn sie indefinit ist.*

Beweis: Ich habe nur das „dann" des Satzes zu beweisen und darf mich auf reine Kernformen in $K(1)$ beschränken. Stellt eine solche die Null in allen $K(p)$ dar, so ist sie nach Satz 19 indefinit, und es läßt sich aus ihr mindestens eine ebenfalls indefinite quinäre Teilform

$$f_0 = [a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2] + [a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 + a_4 x_5^2] = \varphi + \psi$$

abspalten, die also ebenfalls die Null in allen $K(p)$ darstellt. Es genügt dann offenbar zu zeigen, daß f_0 die Null rational darstellt.

Wörtlich genau so, wie im Beweis zu Satz 14, läßt sich hier die Existenz eines rationalen $m = (-1)^\delta 2^\alpha \prod_i p_i^{a_i} P$ nachweisen, das für die Bereiche von 2, p_∞ und allen ungeraden Teilern p_i der a_i durch die beiden Formen φ und $-\psi$ darstellbar ist. Ebenso wie dort ergibt sich unter Benutzung des Produktsatzes für das *Hilbert*sche Symbol, daß dies m durch die binäre Form φ rationall darstelbar

ist. Für die ternäre Form $-\psi$ sind die Invarianten $\hat{c}_p$ für alle nicht in den Koeffizienten enthaltenen ungeraden (also für alle noch übrigen) p gleich $+1$, sodaß $-\psi$ nach Satz 12 (S. 141) für diese $K(p)$ alle p-adischen Zahlen, also auch m darstellt. Nach dem für ternäre Formen bereits bewiesenen Fundamentalsatz (II) (siehe S. 143 Mitte) ist m dann durch $-\psi$ rational darstellbar und somit $f_0 = 0$ rational lösbar.

Aus dem damit bewiesenen Satz 21 ergibt sich mittels (IV) S. 133 sofort die Richtigkeit unseres Fundamentalsatzes (II) für $m = 0$; $n \geqq 4$; dieser ist damit jetzt vollständig bewiesen. Als Kriterien für die Darstellbarkeit von Null verschiedener Zahlen in $\boldsymbol{K}(1)$ erhält man dann unmittelbar aus Satz 20 (S. 146):

Satz 22: *Eine n-äre Form* ($n \geqq 4$) *stellt alle* (*von Null verschiedenen*) *rationalen Zahlen oder nur alle* $\left\{\begin{matrix}\textit{positiven}\\ \textit{negativen}\end{matrix}\right\}$ *Zahlen rational dar, je nachdem sie indefinit oder* $\left\{\begin{matrix}\textit{positiv}\\ \textit{negativ}\end{matrix}\right\}$ *definit ist.*

§ 14. Zusammenfassung.

Damit habe ich die an die Spitze gestellte Frage (I) nach den allgemeinen Darstellbarkeitskriterien für quadratische Formen in $\boldsymbol{K}(1)$ vollständig beantwortet. Ich gebe noch eine kurze Zusammenstellung der Resultate und unterscheide dabei die beiden in der ganzen Untersuchung getrennten Fälle $m \neq 0$ und $m = 0$.

1) Darstellbarkeit von Null verschiedener Zahlen m in $\boldsymbol{K}(1)$.

n	Invarianten	Darstellbarkeitskriterien
1	d	$\left(\frac{m}{p}\right) \equiv \left(\frac{d}{p}\right)$
2	d, $(\check{c}_p)$	$\left(\frac{m, -d}{p}\right) \equiv (\check{c}_p)$
3	d, $(\hat{c}_p)$	$\left(\frac{m}{p}\right) \neq \left(\frac{-d}{p}\right)$ für $\hat{c}_p = -1$
4, 5, ...	d, J	$\left\{\begin{matrix} m > 0 & \text{für } J = 0 \\ m < 0 & \text{für } J = n \end{matrix}\right\}$

Die in der letzten Zeile angeführte Invariante J bezeichnet den Trägheitsindex (die Anzahl der negativen Glieder in einer in $\boldsymbol{K}(p_\infty)$ äquivalenten reinen Form). Offenbar läßt sich das Resultat von Satz 22 (S. 147) dann so darstellen.

2) Darstellbarkeit der Null in $\boldsymbol{K}(1)$.

n	Invarianten	Darstellbarkeitskriterien
2	d, $(\check{c}_p)$	$\left(\frac{-d}{p}\right) \equiv +1$
3	d, $(\hat{c}_p)$	$\hat{c}_p \equiv +1$
4	d, $(\hat{c}_p(\varphi))$	$\hat{c}_p(\varphi) = +1$ für $\left(\frac{d}{p}\right) = +1$
5, 6, ...	d, J	$J \neq +0, n$

Der Fall $n = 1$ tritt hier nicht auf, da eine unäre Form die Null nur identisch darstellt. Die in der Zeile $n = 4$ angeführte Invariante $(\hat{c}_p\,(\varphi))$ hat die Bedeutung von Satz 15 (S. 143).

Alle Darstellbarkeitskriterien hängen nur von den in der zweiten Spalte angeführten charakteristischen Invarianten der Formen ab. Diese sind, wie sich im Laufe der Untersuchung ergab, sämtlich invariant gegen rationale Transformation, ein Teil, z. B. d für gerades n und $\hat{c}_p$ auch gegen rationale Multiplikation. Allein für $(\hat{c}_p\,(\varphi))$ $(n = 4)$ läßt sich aus Satz 15 (S. 143) nur die Transformationsinvarianz derjenigen Einheiten $\hat{c}_p\,(\varphi)$ erschließen, für die $\left(\frac{d}{p}\right) = +1$ ist. In einer weiteren, sich an diese anschließenden Arbeit[1]), die sich mit der Äquivalenz quadratischer Formen in $K(1)$ beschäftigt, komme ich auf die hier gewonnenen Invarianten eingehend zurück.

Zum Schluß führe ich noch eine bemerkenswerte Tatsache an. Offenbar gilt nach den Resultaten in Satz 9 (S. 138), 13 (S. 142), 21 (S. 146), 22 (S. 147) das Prinzip:

Satz 23: *Eine n-äre Form* $(n \neq 4)$ *stellt dann und nur dann alle rationalen Zahlen dar, wenn sie die Null rational darstellt.*

Merkwürdigerweise machen die quaternären Formen eine Ausnahme, indem zwar jede indefinite quaternäre Form alle rationalen Zahlen rational darstellt (Satz 22, S. 147), die Null jedoch nur unter den Bedingungen von Satz 15 (S. 143).

[1]) Dieses Journal, Bd. 152, S. 205 ff.

Über eine Verallgemeinerung der Tetraedergruppe.

Von Herrn *F. Burkhardt* in Dresden.

In der abstrakten Gruppentheorie wird die Tetraedergruppe aus zwei Operationen S und T erzeugt, für welche die Relationen

(1.) $$S^3 = 1,\ T^3 = 1,\ TS = S^2 T^2$$

bestehen. *Burnside*[1]) führt in Anlehnung an *Dyck*[2]) eine dritte Operation $U = T^2 S^2$ ein und schreibt die definierenden Relationen der Tetraedergruppe in der Form

(2.) $$S^3 = 1,\ T^3 = 1,\ U^2 = 1,\ UST = 1.$$

Die 12 Operationen der Tetraedergruppe stellt *Burnside* durch den Ausdruck dar:

(3.) $$S^\alpha (S^{-1} US)^\beta U^\gamma \text{ oder } S^\alpha U^\beta SU^\gamma \qquad (\alpha = 0,1,2;\ \beta, \gamma = 0,1).$$

Aus den beiden Ausdrücken (3.) ergibt sich sofort eine dritte Darstellungsform, die sich bei der Darstellung der Operationen der Oktaeder- und Ikosaedergruppe als besonders brauchbar erweist:

(4.) $$S^\mu,\ S^\mu U S^\nu \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2).$$

Mit Bezug auf die weiteren Untersuchungen stellen wir unter Zuhilfenahme der Abkürzungen

(5.) $$s_1 = S T,\ s_2 = S^2 T^2$$

die 12 Operationen der Tetraedergruppe durch die Ausdrücke

(6.) $$T^\mu,\ s_1 T^\mu,\ s_2 T^\mu,\ s_1 s_2 T^\mu \qquad (\mu = 0,1,2)$$

dar. Die Übereinstimmung dieser Darstellungsform (6.) mit der Darstellungsform (4.) ist sofort ersichtlich:

$$\begin{array}{llll} 1 = 1 & U = s_1 & US = T^2 & US^2 = s_1 s_2 T \\ S = s_1 T^2 & SU = s_2 T^2 & SUS = s_1 T & SUS^2 = s_1 s_2 \\ S^2 = s_2 T & S^2 U = T & S^2 US = s_2 & S^2 US^2 = s_1 s_2 T^2. \end{array}$$

Für die durch (5.) eingeführten Operationen s_1 und s_2 ergeben sich die Beziehungen

$$s_1^2 = 1,\ s_2^2 = 1,\ (s_1 s_2)^2 = 1.$$

Daraus folgt, daß s_1 und s_2 vertauschbar sind.

Im folgenden soll eine Verallgemeinerung der Tetraedergruppe dargelegt werden. Wir gehen dabei wiederum von den beiden Grundoperationen S und T aus, und legen ihnen die Ordnung p (ungerade Primzahl) bei, also

---

[1]) Theory of Groups of finite Order 2. Aufl. S. 408.

[2]) Mathematische Annalen Bd. 20 S. 35.

(7.) $$S^p = 1,\ T^p = 1.$$

Als weitere definierende Relationen wählen wir

(7ª.) $$T^\alpha S^\alpha = S^{p-\alpha} T^{p-\alpha} \qquad \left(\alpha = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right).$$

Aus den Gleichungen (7ª.) folgen sofort die entsprechenden Gleichungen für $\alpha = \frac{p+1}{2}, \ldots, p-1$; denn aus (7ª.) ergibt sich

(8.) $$S^{p-\alpha} T^{p-\alpha} \cdot S^{p-\alpha} T^{p-\alpha} = 1 \qquad \left(\alpha = 1, 2 \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$$

und aus (8.) folgt

(9.) $$T^{p-\alpha} S^{p-\alpha} = S^\alpha T^\alpha.$$

Setzen wir

$$p - \alpha = \beta,\ \alpha = p - \beta,$$

so erhalten wir aus (9.)

(7ᵇ.) $$T^\beta S^\beta = S^{p-\beta} T^{p-\beta} \qquad \left(\beta = \frac{p+1}{2}, \ldots, p-1\right).$$

Aus den für $\alpha = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$ vorgegebenen definierenden Relationen (7ª.) ergeben sich also sofort die entsprechenden Gleichungen für $\alpha = \frac{p+1}{2}, \ldots, p-1$.

Bei den weiteren Untersuchungen wird sich zeigen, daß die durch die Gleichungen (7.) und (7ª.) definierte Gruppe G nicht überbestimmt ist. Dies würde der Fall sein, wenn die beiden Operationen S und T infolge der definierenden Relationen vertauschbar oder eine oder beide Operationen zur Einheitsoperation herabgedrückt würden.

Die Form der definierenden Relationen (7ª.) legt es nahe, die folgenden Hilfsoperationen

(10.) $$s_\alpha = S^\alpha T^\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p-1)$$

einzuführen. Die Hilfsoperation $s_p = S^p T^p$ ist gleich der Einheitsoperation. Allgemein ist bei einem beliebigen ganzzahligen Index h:

$$s_h = S^h T^h = s_{h_1},$$

wobei h_1 die kleinste positive ganze Zahl ist, die kongruent h modulo p ist.

Für die Hilfsoperationen $s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}$ ergeben sich die folgenden Beziehungen:

1. *Die Ordnungszahl der Hilfsoperationen* $s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}$ *ist gleich* 2. Zum Beweis substituieren wir in dem Ausdruck

$$s_\alpha s_\alpha = S^\alpha T^\alpha S^\alpha T^\alpha$$

für $T^\alpha S^\alpha$ die Operation $S^{p-\alpha} T^{p-\alpha}$. Wir erhalten

$$S^\alpha (T^\alpha S^\alpha) T^\alpha = S^\alpha S^{p-\alpha} T^{p-\alpha} T^\alpha = S^p T^p = 1.$$

2. *Die Produktoperation* $s_\alpha s_\beta$ $(\alpha \neq \beta)$ *hat die Ordnung* 2. Der Beweis erfolgt so, daß wir in dem Ausdruck

$$(s_\alpha s_\beta)^2 = S^\alpha T^\alpha S^\beta T^\beta \cdot S^\alpha T^\alpha S^\beta T^\beta$$

an Stelle von $S^\beta T^\beta$ die Operation $T^{p-\beta} S^{p-\beta}$ setzen. Es ergibt sich

$$(s_\alpha s_\beta)^2 = S^\alpha T^{\alpha-\beta} S^{\alpha-\beta} T^{\alpha-\beta} S^{p-\beta}.$$

In diesem Ausdruck substituieren wir

$$S^{\alpha-\beta} T^{\alpha-\beta} = T^{\beta-\alpha} S^{\beta-\alpha}$$

und erhalten

$$(s_\alpha s_\beta)^2 = S^\alpha S^{p-\alpha} = 1.$$

Aus den beiden Sätzen (1.) und (2.) folgt:

3. *Die Hilfsoperationen s_α und s_β sind vertauschbar*; denn aus der Gleichung

$$s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta = 1$$

ergibt sich durch linksseitiges Multiplizieren mit s_β und darauf mit s_α, da s_α und s_β die Ordnung 2 haben, die Gleichung

$$s_\alpha s_\beta = s_\beta s_\alpha.$$

Für die weiteren Untersuchungen sind die *Beziehungen* wichtig, die *zwischen den Hilfsoperationen und den Grundoperationen S und T* bestehen. Aus den Definitionsgleichungen (10.) folgt sofort:

(11.) $$S s_\alpha T = s_{\alpha+1},$$

(11ª.) $$S^\beta s_\alpha T^\beta = s_{\alpha+\beta}.$$

Weiter findet man

(12.) $$T s_\alpha = s_{p-1} s_{\alpha-1} T.$$

Diese Gleichung erhält man, wenn man in dem Ausdruck $T S^\alpha T^\alpha$ für TS die Operation $S^{p-1} T^{p-1}$ substituiert:

$$TS^\alpha T^\alpha = S^{p-1} T^{p-1} S^{\alpha-1} T^{\alpha-1} T = s_{p-1} s_{\alpha-1} T.$$

Multipliziert man die Gleichung (12.) linksseitig mit T, wodurch man

$$T^2 s_\alpha = T s_{p-1} s_{\alpha-1} T$$

erhält, so läßt sich in dem Ausdruck auf der rechten Seite nach Gleichung (12.) $T s_{p-1}$ durch $s_{p-1} s_{p-2} T$ und $T s_{\alpha-1}$ durch $s_{p-1} s_{\alpha-2} T$ ersetzen, sodaß sich, da $s_{p-1} s_{p-1} = 1$ ist, die Beziehung

$$T^2 s_\alpha = s_{p-2} s_{\alpha-2} T^2$$

ergibt. Durch Weiterführung dieser Rechnungen findet man allgemein

(12ª.) $$T^\mu s_\alpha = s_{p-\mu} s_{\alpha-\mu} T^\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p-1).$$

Die Gleichungen (11.) und (12.) ermöglichen eine übersichtliche *Darstellung der Operationen der durch die Gleichungen* (7.) *und* (7ª.) *definierten Gruppe G mittels der Hilfsoperationen und der Grundoperation T.* Wir gehen zu diesem Zwecke von der allgemeinen Operation der Gruppe G

(13.) $$S^{\alpha_1} T^{\beta_1} S^{\alpha_2} T^{\beta_2} S^{\alpha_3} T^{\beta_3} \ldots \qquad (\alpha_i, \beta_i = 1, 2, \ldots, p-1)$$

aus. Diese läßt sich auf Grund der Definitionsgleichungen (10.) der Hilfsoperationen in

$$s_{\alpha_1} T^{\beta_1 - \alpha_1} s_{\alpha_2} T^{\beta_2 - \alpha_2} s_{\alpha_3} T^{\beta_3 - \alpha_3} \ldots$$

überführen, und daraus ergibt sich unter Anwendung der Gleichung (12.):

(14.) $$s_{\gamma_1} s_{\gamma_2} s_{\gamma_3} \ldots T^\delta,$$

wobei $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ ganze Zahlen von 1 bis $p-1$ bedeuten und $\gamma_1 \neq \gamma_2 \neq \gamma_3 \neq \cdots$ ist. Denn wären zwei Indizes einander gleich, dann würden, da die Hilfsoperationen vertauschbar sind und die Ordnung 2 haben, die beiden Hilfsoperationen im allgemeinen Ausdruck (14.) verschwinden. Für δ kommen die Zahlen von 0 bis $p-1$

in Betracht. Ist das letzte Glied der allgemeinen Operation (14.) keine T-Operation, sondern eine S-Operation, dann läßt sich durch die Umformung

$$S^{a_n} = S^{a_n} T^{a_n} T^{p-a_n} = s_{a_n} T^{p-a_n}$$

erreichen, daß das letzte Glied eine T-Operation wird.

Es entsteht die *Frage*: *Sind die durch den Ausdruck* (14.) *dargestellten Operationen voneinander verschieden oder ist eine gewisse Zahl von ihnen gleich*? Zur Beantwortung dieser Frage nehmen wir an, daß die Operationen

$$s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_3} \ldots T^{\mu_1} \text{ und } s_{\beta_1} s_{\beta_2} s_{\beta_3} \ldots T^{\mu_2}$$

gleich wären, wobei $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \cdots \neq \beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3 \neq \cdots$ sei. Die gleichen Hilfsoperationen der beiden Operationen mögen durch linksseitiges Multiplizieren abgestrichen worden sein. Die Gleichsetzung der beiden Operationen ergibt sofort die Beziehung

$$s_{\gamma_1} s_{\gamma_2} s_{\gamma_3} \ldots T^{\mu_2 - \mu_1} = 1. \qquad \gamma_1 \neq \gamma_2 \neq \gamma_3 \neq \cdots).$$

Daraus folgt weiter

$$s_{\gamma_1} s_{\gamma_2} s_{\gamma_3} \ldots = T^{\mu_1 - \mu_2}.$$

Ist $\mu_1 - \mu_2 \not\equiv 0 \bmod p$, dann ist die rechte Seite eine Potenzoperation von T und hat die Ordnung p, während die linke Seite die Ordnung 2 hat. Die gemachte Annahme führt also zu einem Widerspruch.

Ist $\mu_1 - \mu_2 \equiv 0 \bmod p$, dann ergibt sich ebenfalls ein Widerspruch; denn substituieren wir in dem Ausdruck

$$(15.) \qquad S^{\gamma_1} T^{\gamma_1} S^{\gamma_2} T^{\gamma_2} S^{\gamma_3} T^{\gamma_3} \ldots$$

$$S^{\gamma_2} T^{\gamma_2} = T^{p-\gamma_2} S^{p-\gamma_2}, \; S^{\gamma_4} T^{\gamma_4} = T^{p-\gamma_4} S^{p-\gamma_4} \ldots,$$

so erhalten wir

$$S^{\gamma_1} T^{\gamma_1 - \gamma_2} S^{\gamma_3 - \gamma_2} T^{\gamma_3 - \gamma_4} S^{\gamma_3 - \gamma_4} \ldots = 1.$$

Dieser Ausdruck läßt sich nur dann weiter reduzieren, wenn entweder $\gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_5 \ldots$ oder $\gamma_2 = \gamma_4 = \gamma_6 = \ldots$ ist.

Substituieren wir in dem Ausdruck (15.)

$$T^{\gamma_1} S^{\gamma_1} = S^{p-\gamma_1} T^{p-\gamma_1}, \; T^{\gamma_2} S^{\gamma_3} = S^{p-\gamma_2} T^{p-\gamma_3} \ldots,$$

so ergibt sich

$$T^{p-\gamma_1} S^{\gamma_2 - \gamma_1} T^{\gamma_2 - \gamma_3} S^{\gamma_4 - \gamma_3} T^{\gamma_4 - \gamma_5} \ldots = 1.$$

Auch hier ist weitere Reduktion nur unter den oben angeführten Bedingungen möglich, die aber einen Widerspruch bedeuten.

Nach Durchführung dieser Betrachtungen ist es möglich, die *Ordnungszahl der durch die Gleichungen* (7.) *und* (7ª.) *definierten Gruppe* G zu bestimmen. Ausgehend von der allgemeinen Operation (14.) ergibt sich, daß die Gruppe G von den folgenden Operationen gebildet wird:

(16ª.) T^{μ} ; $(\mu = 0, 1, \ldots, p-1)$

(16ᵇ.) $s_{\alpha} T^{\mu}$; $(\alpha = 1, 2, \ldots, p-1;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, p-1)$

(16ᶜ.) $s^{\alpha} s_{\beta} T^{\mu}$; $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p-1;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, p-1;\ \alpha \neq \beta)$

(16ᵈ.) $s_{\alpha} s_{\beta} s_{\gamma} T^{\mu}$; $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, p-1;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, p-1;\ \alpha \neq \beta \neq \gamma)$

u. s. f.

Die Zahl der durch (16ª.) dargestellten Operationen ist p,

durch $(16^{b}.)$: $\binom{p-1}{1} p$, $(16^{c}.)$: $\binom{p-1}{2} p$, $(16^{d}.)$: $\binom{p-1}{3} p$ u. s. f.

Die Gesamtzahl der Operationen ist also

$$\left[1 + \binom{p-1}{1} + \binom{p-1}{2} + \binom{p-1}{3} + \cdots \binom{p-1}{p-1}\right] p = p\, 2^{p-1}.$$

Die Ordnungszahl der durch die Gleichungen (7.) *und* $(7^{a}.)$ *definierten Gruppe G ist* $p\, 2^{p-1}$.

Die Tetraedergruppe ist eine spezielle Gruppe G. Für sie ist $p = 3$ und ihre Ordnungszahl ist $3 \cdot 2^2 = 12$. Die Operationen der Tetraedergruppe werden durch die Ausdrücke $(16^{a}.)$, $(16^{b}.)$ und $(16^{c}.)$ dargestellt. Auch die weiteren Untersuchungen werden ergeben, daß die durch die Gleichungen (7.) und $(7^{a}.)$ definierte Gruppe als eine Verallgemeinerung der Tetraedergruppe anzusehen ist.

Was die *Auflösbarkeit der Gruppe G* anlangt, so folgt aus dem Satz von *Burnside* [1]: „Die Gruppen von der Ordnung $p^{\alpha} q^{\beta}$ (p und q verschiedene Primzahlen) sind auflösbar", daß die Gruppe G auflösbar ist. Die Indexreihe besteht also aus lauter Primzahlen. Zur Aufstellung der *Kompositionsreihe* bedienen wir uns eines Satzes von *Dyck* [2]), der besagt, daß diejenigen Operationen einer Gruppe $\mathfrak{A}$, die beim Hinzufügen einer weiteren definierenden Relation gleich der Einheitsoperation werden, eine Untergruppe bilden, die in der Gruppe $\mathfrak{A}$ ausgezeichnet enthalten ist. Wir wählen als weitere definierende Relation

$$(17.) \qquad s_1 = 1.$$

Aus der Gleichung (11.) folgt dann sofort

$$(17^{a}.) \qquad s_{\alpha} = 1 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p-1).$$

Denn $S\, s_1\, T = s_2$. Ist $s_1 = 1$, dann ist auch, da $s_1 = S\,T$ ist, $s_2 = 1$. Durch Weiterführung ergibt sich die Richtigkeit von $(17^{a}.)$. Es sei bemerkt, daß durch die Annahme (17.) die Operationen S und T weder vertauschbar noch gleich 1 werden, sondern es ergeben sich für diese lediglich die Beziehungen $S^{\alpha} = T^{p-\alpha}$; $(\alpha = 1, 2, \ldots, p-1)$. Aus der Gleichung $(17^{a}.)$ folgt, daß alle Operationen, die aus den Hilfsoperationen $s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}$ gebildet werden, bei der Annahme $s_1 = 1$ gleich der Identität werden. Das sind die Operationen

$$(18.) \qquad \begin{aligned} &1,\ s_{\alpha} \quad ;\ (\alpha = 1, 2, \ldots, p-1) \\ &s_{\alpha}\, s_{\beta} \quad ;\ (\alpha, \beta = 1, 2, 3, \ldots, p-1;\ \alpha \neq \beta) \\ &s_{\alpha}\, s_{\beta}\, s_{\gamma};\ (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, p-1;\ \alpha \neq \beta \neq \gamma) \\ &\text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Die Anzahl derselben ist

$$1 + \binom{p-1}{1} + \binom{p-1}{2} + \binom{p-1}{3} + \cdots \binom{p-1}{p-1} = 2^{p-1}.$$

Weitere Operationen werden nicht gleich 1; denn würde z. B. $s_{\alpha}\, s_{\beta} \ldots T^{\mu} = 1$, dann würde daraus folgen $T^{\mu} = 1$, sodaß auch $T = 1$ wäre. Nach den Unter-

---

[1]) Proceedings of the London Mathematical Society 1904 pag. 388.

[2]) Mathematische Annalen Bd. 20 S. 12.

suchungen *Dycks* bilden die Operationen (18.) die größte ausgezeichnete Untergruppe von G. Wir bezeichnen sie mit G_1. Die *Gruppe* G_1 ist *Abel*sch, *ihr Index ist* p.

Die größte ausgezeichnete Untergruppe von G_1 setzen wir aus den $p-2$ Hilfsoperationen

$$s_1, s_2, \ldots, s_{p-2}$$

zusammen, indem wir eine beliebig wählbare Hilfsoperation (in diesem Falle s_{p-1}) streichen. Die Gesamtheit der Operationen, die sich aus den Hilfsoperationen s_α; $(\alpha = 1, 2, \ldots, p-2)$ herleiten lassen, bildet eine Gruppe; denn durch Zusammensetzung zweier Operationen z. B. $s_\alpha s_\beta s_\gamma$ und $s_\alpha s_\delta$ entsteht wiederum eine Operation der Gesamtheit: $(s_\beta s_\gamma s_\delta)$. Diese Untergruppe ist ausgezeichnet in der Gruppe G_1 enthalten; denn infolge der Vertauschbarkeit der Hilfsoperationen ist bei der Transformation die transformierte Operation gleich der zu transformierenden Operation. Die Ordnungszahl dieser ausgezeichneten Untergruppe, die wir mit G_2 bezeichnen, ist

$$1 + \binom{p-2}{1} + \binom{p-2}{2} + \cdots \binom{p-2}{p-2} = 2^{p-2}.$$

Die größte ausgezeichnete Untergruppe von G_2 bilden wir aus den Hilfsoperationen

$$s_1, s_2, \ldots, s_{p-3}.$$

Nach denselben Überlegungen wie oben ergibt sich als Ordnungszahl von G_3 2^{p-3} und als Index die Zahl 2.

Durch Weiterführung dieser Betrachtungen gelangen wir zu den ausgezeichneten Untergruppen $G_4, G_5, \ldots, G_{p-1}, G_p$. Die ausgezeichnete Untergruppe G_{p-1} besteht aus einer Hilfsoperation s_α und der Einheitsoperation, und G_p ist die Einheitsoperation. Die einzelnen Gruppen $G, G_1, G_2, \ldots, G_{p-1}, G_p$ der Kompositionsreihe der verallgemeinerten Tetraedergruppe haben die Ordnungszahlen

$$p\,2^{p-1},\ 2^{p-1},\ 2^{p-2}, \ldots, 2, 1,$$

und die Indexreihe besteht aus den Zahlen

$$p,\ 2,\ 2, \ldots,\ (\text{Index } 2\ \overline{p-1}\ \text{mal}).$$

Es sei noch bemerkt, daß nur die Gruppe G_1 eine ausgezeichnete Untergruppe von G ist; die weiteren Gruppen $G_2, G_3, \ldots, G_p$ sind nicht mehr in G ausgezeichnet enthalten, wohl aber in G_1, wie man leicht ersehen kann.

Als *Ordnungszahlen für die Operationen der erweiterten Tetraedergruppe* (die Einheitsoperation ausgenommen) kommen zwei Zahlen, nämlich 2 und p in Betracht. Wie bereits gezeigt wurde, haben diejenigen Operationen, die sich nur aus den Hilfsoperationen zusammensetzen und die T-Operation explizit nicht enthalten, die Ordnung 2. Zur Bestimmung der Ordnungszahlen der übrigen Operationen greifen wir auf die Gleichung (12ª.) zurück, aus der sich leicht die weiteren Gleichungen herleiten lassen:

$$\begin{aligned} T^\mu s_\alpha s_\beta &= s_{\alpha-\mu} s_{\beta-\mu} T_\mu \\ T^\mu s_\alpha s_\beta s_\gamma &= s_{p-\mu} s_{\alpha-\mu} s_{\beta-\mu} s_{\gamma-\mu} T^\mu \\ T^\mu s_\alpha s_\beta s_\gamma s_\delta &= s_{\alpha-\mu} s_{\beta-\mu} s_{\gamma-\mu} s_{-\mu} T^\mu \end{aligned} \qquad (12^b.)$$

u. s. f.

Mit Hilfe der Gleichung (12ª.) lassen sich die Potenzen der Operation $s_\alpha T^\mu$ in folgender Weise umformen:

$$(s_\alpha T^\mu)^2 = s_\alpha s_{p-\mu} s_{\alpha-\mu} T^{2\mu}$$
$$(s_\alpha T^\mu)^3 = s_\alpha s_{p-\mu} s_{\alpha-\mu} s_{p-2\mu} s_{\alpha-2\mu} T^{3\mu}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(s_\alpha T^\mu)^p = s_\alpha s_{\alpha-\mu} s_{\alpha-2\mu} \cdots s_{\alpha-(p-1)\mu} s_{p-\mu} s_{p-2\mu} \cdots s_{p-(p-1)\mu} T^{p\mu}.$$

Die Operationen

$$s_\alpha,\ s_{\alpha-\mu}, s_{\alpha-2\mu}, \ldots, s_{\alpha-(p-1)\mu}$$

sind voneinander verschieden. Denn die Gleichheit zweier Operationen, etwa $s_{\alpha-x_1\mu}$ und $s_{\alpha-x_2\mu}$ $(x_1 \neq x_2)$ würde die Kongruenz

$$\alpha - x_1\mu \equiv \alpha - x_2\mu \text{ mod. } p$$

zur Voraussetzung haben. Aus dieser würde folgen

$$x_1 \equiv x_2 \text{ mod. } p,$$

und da x_1 und x_2 zwischen 0 und $p-1$ liegen, so müßte

$$x_1 = x_2$$

sein. Die p Operationen $s_\alpha, s_{\alpha-\mu}, s_{\alpha-2\mu}, \ldots, s_{\alpha-(p-1)\mu}$ sind also voneinander verschieden. Daraus ergibt sich weiter, daß die Reihe $s_\alpha, s_{\alpha-\mu}, s_{\alpha-2\mu}, \ldots, s_{\alpha-(p-1)\mu}$ bis auf die Anordnung identisch ist mit der Reihe der Hilfsoperationen $s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}, s_p = 1$. In derselben Weise läßt sich schließen, daß in der Reihe

$$s_{p-\mu}, s_{p-2\mu}, \ldots, s_{p-(p-1)\mu}$$

sämtliche Hilfsoperationen $s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}$ vorkommen. Aus beiden Überlegungen folgt, da $T^{p\mu} = 1$ und die Hilfsoperationen vertauschbar sind und die Ordnung 2 haben, daß die Operation $(s_\alpha T^\mu)^p$ gleich der Einheitsoperation ist. Da p eine Primzahl ist, so ist p auch der kleinste Exponent, für den $(s_\alpha T^\mu)^p = 1$ ist, mithin die Ordnungszahl; denn wäre dies noch bei einem kleineren Exponenten der Fall, dann wäre die Operation $s_\alpha T^\mu = 1$.

In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß $s_\alpha s_\beta T^\mu$ die Ordnung p besitzt.

$$(s_\alpha s_\beta T^\mu)^p = s_\alpha s_{\alpha-\mu} s_{\alpha-2\mu} \cdots s_{\alpha-(p-1)\mu} s_\beta s_{\beta-\mu} s_{\beta-2\mu} \cdots s_{\beta-(p-1)\mu} T^{p\mu}.$$

Die Reihen

$$s_\alpha s_{\alpha-\mu} s_{\alpha-2\mu} \cdots s_{\alpha-(p-1)\mu}$$

und

$$s_\beta s_{\beta-\mu} s_{\beta-2\mu} \cdots s_{\beta-(p-1)\mu}$$

sind bis auf die Anordnung mit der Reihe der Hilfsoperationen identisch, sodaß

$$(s_\alpha s_\beta T^\mu)^p = 1$$

und p die Ordnungszahl ist.

Das angegebene Verfahren läßt sich auf die weiteren Operationen $s_\alpha s_\beta s_\gamma T^\mu$, $s_\alpha s_\beta s_\gamma s_\delta T^\mu, \ldots$ ausdehnen. Wir finden also, daß alle *Operationen, welche die Operation T explizit enthalten, die Ordnung p haben. Die übrigen* (mit Ausnahme der Einheitsoperation) *haben die Ordnung* 2. Die Zahl der Operationen mit der Ordnung p ist $(p-1)\,2^{p-1}$ und mit der Ordnung 2: $2^{p-1} - 1$. Von den 12 Operationen der Tetraedergruppe haben 8 Operationen die Ordnung 3 und 3 Operationen die Ordnung 2.

Über Kollineationen und Korrelationen im Raume.

Von Herrn *Otto Staude* in Rostock.

Bei der Kollineation:

$$x'_k = \sum_1^4{}^l a_{kl}\, x_l,\ k = 1, \ldots, 4$$

beziehen sich im allgemeinen die Punktkoordinaten x_l und x'_k auf zwei verschiedene Koordinatentetraeder, von denen je eines in jedem der beiden Räume liegt, die durch die Kollineation in Beziehung gesetzt sind. Man kann nun durch geeignete Wahl der beiden Tetraeder die *kanonische Form*:

$$x'_k = \lambda_k\, x_k,\ k = 1, \ldots, 4$$

der Gleichungen der Kollineation herstellen, indem man etwa das Tetraeder des einen Raumes beliebig annimmt und im anderen das vermöge der Kollineation *entsprechende* einführt. Die Herstellung der kanonischen Form ist daher keine bestimmte Aufgabe. Um sie zu einer solchen zu machen, kann man nun von *zwei* Kollineationen ausgehen und fragen, ob sie *beide*, durch eine Koordinatentransformation in jedem Raume, auf die kanonische Form gebracht werden können. So verfährt *Weierstraß* in seiner Theorie der Elementarteiler. Man kann indessen auch bei *einer* Kollineation bleiben und die in beiden Räumen auszuführenden Koordinatentransformationen durch die Bedingung einschränken, daß sie *orthogonal* sein sollen. Wir wollen also im folgenden die Frage stellen: Kann die allgemeine Kollineation oder auch Korrelation durch orthogonale Transformation in jedem der beiden Räume auf die kanonische Form gebracht werden? Wir werden sehen, daß dies für Kollineation und Korrelation in vollkommen übereinstimmender Weise möglich ist.

Diese Betrachtungen bieten eine Ergänzung der wertvollen Arbeiten von *K. Kommerell*[1]), indem sie die gemeinsame Grundlage der dortigen Transformationen hervorheben. Sie wollen weiterhin zeigen, inwiefern die *Unterschiede* der Reduktion auf die kanonische Form, die sich bei den *Kollineationen* im Vergleich mit den *Korrelationen* darbieten, darin begründet sind, daß bei durchgehender Anwendung *rechtwinkliger* Koordinaten, wie sie *K. Kommerell* nach der Natur seiner Fragestellung gebrauchen muß, die vierte homogene Koordinate von der Orthogonalität abweicht und daß diese Abweichung bei Punkt- und Ebenenkoordinaten *verschieden* ist.

[1]) *K. Kommerell*, Jahresber. d. D. Math.-Ver., Bd. 29, S. 1—27; Bd. 30, S. 35—55; Mathem. Zeitschr. Bd. 10, S. 217—230; im folgenden zitiert unter K. Koll.; K. Aff.; K. Korr.

§ 1. Transformation im allgemeinen.

1. *Allgemeine Transformation einer Korrelation.* Wir gehen von der geschlossenen Gleichung einer räumlichen *Korrelation* aus:

$$(1.) \qquad f(x', x) = \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_l a_{kl}\, x'_k\, x_l = 0,$$

wo sich die Punktkoordinaten x_l und x'_k auf verschiedene Koordinatentetraeder $E_1\, E_2\, E_3\, E_4$ und $E'_1\, E'_2\, E'_3\, E'_4$ in den beiden Räumen R und R' beziehen. Wir führen in jedem der beiden Räume ein neues Koordinatentetraeder $I_1\, I_2\, I_3\, I_4$ und $I'_1\, I'_2\, I'_3\, I'_4$ ein mittels der Substitutionen:

$$(2.) \qquad x_l = \sum_1^4{}_n x_l^{(n)}\, y_n, \quad x'_k = \sum_1^4{}_m x_k'^{(m)}\, y'_m$$

und erhalten damit:

$$(3.) \qquad f = \sum_1^4{}_m \sum_1^4{}_n f_{mn}\, y'_m\, y_n = 0,$$

worin die neuen Koeffizienten die Werte haben:

$$(4.) \qquad f_{mn} = \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_l a_{kl}\, x_k'^{(m)}\, x_l^{(n)}.$$

Die Koeffizienten $x_l^{(n)}$ und $x_k'^{(m)}$ in (2.) sind die Koordinaten der neuen Tetraederecken I_n und I'_m. Bezeichnen wir mit $A = |a_{kl}|$ und $D = |f_{mn}|$ die Determinanten der alten und neuen Koeffizienten in (1.) und (3.), mit $S = |x_l^{(n)}|$ und $S' = |x_k'^{(m)}|$ die Determinanten der Substitutionen (2.), so ist:

$$(5.) \qquad D = S\, S'\, A.$$

2. *Allgemeine Transformation einer Kollineation.* In der geschlossenen Gleichung der räumlichen *Kollineation*:

$$(6.) \qquad f(u', x) = \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_l a_{kl}\, u'_k\, x_l = 0$$

haben die Koordinaten x_l die Bedeutung wie in (1.), während u'_k Ebenenkoordinaten in bezug auf das Tetraeder $E'_1\, E'_2\, E'_3\, E'_4$ bedeuten. Zu den Substitutionen (2.) tritt dann entsprechend hinzu [1]):

$$(7.) \qquad S'\, u'_k = \sum_1^4{}_m u_k'^{(m)}\, v'_m,$$

wo $u_k'^{(m)}$ die Unterdeterminante des Elementes $x_k'^{(m)}$ in der Determinante S' ist [2]).

In den neuen Koordinaten y_n und v'_m lautet dann die Gleichung (6.):

$$(8.) \qquad S'\, f = \sum_1^4{}_m \sum_1^4{}_n f_{mn}\, v'_m\, y_n = 0,$$

wo die neuen Koeffizienten die Werte haben:

$$(9.) \qquad f_{mn} = \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_l a_{kl}\, u_k'^{(m)}\, x_l^{(n)}.$$

Für die Determinante $D = |f_{mn}|$ ist:

$$(10.) \qquad D = S\, S'^3\, A.$$

3. *Orthogonale Transformation.* Nehmen wir im besonderen an, daß die

---

[1]) Der Kürze wegen beziehe ich mich an einigen Stellen auf meine Bücher Geom. des Punktes etc., Leipzig 1905, und Geom. der Flächen 2. O., Leipzig 1910, unter St. I § ... und St. II § ...

[2]) St. I § 63, (26); (30).

beiden Substitutionen (2.) *orthogonale* seien, so gelten für das Tetraeder $I_1 I_2 I_3 I_4$ die 10 Gleichungen:

$$(11.) \qquad \sum_1^4{}_l x_l^{(m)} x_l^{(m)} = 1, \ \sum_1^4{}_l x_l^{(m)} x_l^{(n)} = 0, \qquad (n \neq m)$$

und die daraus folgenden:

$$(12.) \qquad \sum_1^4{}_m x_l^{(m)} x_l^{(m)} = 1, \ \sum_1^4{}_m x_l^{(m)} x_n^{(m)} = 0, \qquad (n \neq l)$$

ebenso für das Tetraeder $I_1' I_2' I_3' I_4'$ dieselben Gleichungen mit x' für x. Für die Determinanten können wir $S = 1$, $S' = 1$ nehmen. Dann ist in diesen Determinanten jedes Element gleich seiner Unterdeterminante [1]):

$$(13.) \qquad x_l^{(m)} = u_l^{(m)}, \quad x_k'^{(m)} = u_k'^{(m)}.$$

Infolgedessen sind bei orthogonaler Transformation die beiden Koeffizienten (4.) und (9.) dieselben. Auch vereinigen sich die Gleichungen (5.) und (10.) zu:

$$(14.) \qquad D = A.$$

§ 2. Die Herstellung der kanonischen Form.

1. *Die kanonische Form.* Es soll nun unsere Aufgabe sein, unter Anwendung orthogonaler Transformation in beiden Räumen, die Gleichungen § 1, (3.) und (8.) auf die Form zu bringen:

$$(1.) \qquad f = f_{11} y_1' y_1 + f_{22} y_2' y_2 + f_{33} y_3' y_3 + f_{44} y_4' y_4 = 0$$

und:

$$(2.) \qquad f = f_{11} v_1' y_1 + f_{22} v_2' y_2 + f_{33} v_3' y_3 + f_{44} v_4' y_4 = 0.$$

Da aber die Koeffizienten § 1, (4.) und (9.) nach § 1, (13.) dieselben sind, so haben wir sowohl für die *Korrelation* wie für die *Kollineation* die gleichen Bedingungen:

$$(3.) \qquad f_{mn} = 0, \qquad (m \neq n).$$

Es liegen dann für die 32 Unbekannten $x_l^{(n)} = u_l^{(n)}$, $x_k'^{(m)} = u_k'^{(m)}$ vor die 12 Gleichungen (3.) und zweimal 10 Gleichungen § 1, (11.) oder (12.) mit x und x'.

Wir nehmen aber als weitere 4 Unbekannte noch $f_{11}, f_{22}, f_{33}, f_{44}$ und dementsprechend noch die 4 Gleichungen § 1, (4.) oder (9.) mit $m = n$ hinzu.

2. *Die Grundbedingungen.* Wir schreiben die Gleichungen § 1, (4.) in der doppelten Anordnung:

$$(4.) \qquad \sum_1^4{}_k \left\{ \sum_1^4{}_l a_{kl} x_l^{(n)} \right\} x_k'^{(m)} = f_{mn}, \quad \sum_1^4{}_l \left\{ \sum_1^4{}_k a_{kl} x_k'^{(m)} \right\} x_l^{(n)} = f_{mn},$$

multiplizieren sie mit $x_h'^{(m)}$ und $x_i^{(n)}$ und summieren über m und n:

$$\sum_1^4{}_k \left\{ \sum_1^4{}_l a_{kl} x_l^{(n)} \right\} \sum_1^4{}_m x_k'^{(m)} x_h'^{(m)} = \sum_1^4{}_m f_{mn} x_h'^{(m)}, \quad \sum_1^4{}_l \left\{ \sum_1^4{}_k a_{kl} x_k'^{(m)} \right\} \sum_1^4{}_n x_l^{(n)} x_i^{(n)} = \sum_1^4{}_n f_{mn} x_i^{(n)}.$$

Diese Gleichungen reduzieren sich aber nach § 1, (12.) und § 2, (3.) auf:

$$\sum_1^4{}_l a_{hl} x_l^{(n)} = f_{nn} x_h'^{(n)}, \qquad \sum_1^4{}_k a_{ki} x_k'^{(m)} = f_{mm} x_i^{(m)}$$

oder mit veränderter Bezeichnung:

$$(5.) \ \sum_1^4{}_l a_{kl} x_l^{(i)} = f_{ii} x_k'^{(i)}, \ k = 1, 2, 3, 4, \qquad (6.) \ \sum_1^4{}_k a_{kl} x_k'^{(i)} = f_{ii} x_l^{(i)}, \ l = 1, 2, 3, 4.$$

---

[1]) St. I § 37, (12).

Dies sind mit $i = 1, 2, 3, 4$ die *Grundgleichungen*, die zunächst die Unbekannten $x_l^{(i)}$ und $x_k'^{(i)}$ noch in *verbundener* Form enthalten. Wir fügen ihnen noch aus § 1, (11.) hinzu:

$$(7.)\quad \sum_1^4 l\, x_l^{(i)2} = 1, \qquad (8.)\quad \sum_1^4 k\, x_k'^{(i)2} = 1.$$

3. *Hinreichender Charakter.* Die Gleichungen (5.)—(8.) sind hinreichend, weil aus ihnen die ursprünglichen Bedingungen wieder hervorgehen. Zunächst nämlich folgt aus (5.) durch Multiplikation mit $x_k'^{(i)}$ und Summation über k mit Rücksicht auf (8.):

$$(9.)\qquad \sum_1^4 k \sum_1^4 l\, a_{kl}\, x_k'^{(i)}\, x_l^{(i)} = f_{ii},$$

übereinstimmend mit § 1, (4.) für $m = n = i$. Wir schreiben ferner die Gleichungen (5.) für einen von i verschiedenen Wert h nieder:

$$(5'.)\qquad \sum_1^4 l\, a_{kl}\, x_l^{(h)} = f_{hh}\, x_k'^{(h)}, \qquad (6'.)\quad \sum_1^4 k\, a_{kl}\, x_k'^{(h)} = f_{hh}\, x_l^{(h)},$$

multiplizieren nun (5.) mit $x_k'^{(h)}$, (6.) mit $x_l^{(h)}$, (5'.) mit $x_k'^{(i)}$, (6'.) mit $x_l^{(i)}$ und summieren über k und l. Dann erhalten wir mit der Bezeichnung § 1, (4.) und den Abkürzungen:

$$(10.)\qquad X = \sum_1^4 l\, x_l^{(i)}\, x_l^{(h)}, \quad X' = \sum_1^4 k\, x_k'^{(i)}\, x_k'^{(h)}$$

die Gleichungen:

$$(11.)\qquad \begin{cases} f_{hi} = f_{ii}\, X', & f_{ih} = f_{ii}\, X, \\ f_{ih} = f_{hh}\, X', & f_{hi} = f_{hh} X. \end{cases}$$

Daraus folgt zunächst:

$$f_{ii}\, X - f_{hh}\, X' = 0,\ f_{hh}\, X - f_{ii}\, X' = 0$$

und unter der Bedingung $f_{ii}^2 \neq f_{hh}^2$:

$$(12.)\qquad X = 0, \quad X' = 0$$

und damit aus (11.) weiter für $h \neq i$:

$$(13.)\qquad f_{hi} = 0, \quad f_{ih} = 0.$$

Somit folgen aus den Grundgleichungen (5.)—(8.) *sowohl die Bedingungen* (3.) *als auch die Orthogonalitätsbedingungen*:

$$(12'.)\qquad \sum_1^4 l\, x_l^{(i)}\, x_l^{(h)} = 0, \qquad \sum_1^4 k\, x_k'^{(i)}\, x_k'^{(h)} = 0,$$

falls $f_{ii}^2 \neq f_{hh}^2$. Für $f_{ii}^2 = f_{hh}^2$ müssen wir die Bedingungen (12.) hinzufügen, um (13.) zu erhalten [1]).

4. *Trennung der Unbekannten x und x'.* Wir multiplizieren nun die Gleichungen (5.) und (6.) mit a_{kn} und a_{ml}, summieren über k und l und erhalten:

$$\sum_1^4 l \sum_1^4 k\, a_{kl}\, a_{kn}\, x_l^{(i)} = f_{ii} \sum_1^4 k\, a_{kn}\, x_k'^{(i)}, \quad \sum_1^4 k \sum_1^4 l\, a_{kl}\, a_{ml}\, x_k'^{(i)} = f_{ii} \sum_1^4 l\, a_{ml}\, x_l^{(i)}$$

oder mit den Abkürzungen [2]):

$$(14.)\qquad b_{ln} = b_{nl}' = \sum_1^4 k\, a_{kl}\, a_{kn}, \quad b_{km}' = b_{mk}' = \sum_1^4 l\, a_{kl}\, a_{ml}$$

und mit Rücksicht auf (6.) und (5.):

---

[1]) St. II, § 88, (14).

[2]) K. Koll. S. 23, (67); K. Aff. S. 39, (8); K. Korr. S. 219, (8).

(15.) $\sum_1^4{}_l\, b_{nl}\, x_l^{(i)} = f_{ii}^2\, x_n^{(i)},\ n = 1,2,3,4,$ (16.) $\sum_1^4{}_k\, b'_{mk}\, x_k'^{(i)} = f_{ii}^2\, x_m'^{(i)},\ m = 1,2,3,4,$

wozu wir wieder (7.) und (8.) nehmen.

Damit sind die in (5.) und (6.) verflochtenen Unbekannten $x_l^{(i)}$ und $x_k'^{(i)}$ *getrennt*, und wir haben für jede der 8 Gruppen von 5 Unbekannten $x_l^{(i)}$, f_{ii} und $x_k'^{(i)}$, f_{ii} 5 Gleichungen (15.), (7.) und (16.), (8.).

5. *Die Determinantengleichung.* Aus (15.), (7.) folgt zunächst, daß die Quadrate f_{ii}^2 $(i = 1,2,3,4)$ der Gleichung 4. Grades in λ^2 genügen:

$$(17.)\qquad \mathrm{B}(\lambda^2) = \begin{vmatrix} b_{11}-\lambda^2 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22}-\lambda^2 & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\lambda^2 & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44}-\lambda^2 \end{vmatrix} = 0,$$

und aus (16.), (8.), daß diese Quadrate der entsprechenden Gleichung, mit b' für b genügen. Beide Gleichungen sind aber dieselben und geben entwickelt:

$$(18.)\qquad \mathrm{B}(\lambda^2) = \lambda^8 - B_3\lambda^6 + B_2\lambda^4 - B_1\lambda^2 + B = 0,$$

wo die Koeffizienten nach (14.) infolge des Multiplikationstheorems der Determinanten und Unterdeterminanten die Werte haben:

$$(19.)\quad B = A^2,\ B_1 = \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_l A_{kl}^2,\ B_2 = \sum_1^6{}_k \sum_1^6{}_l a_{kl}^2,\ B_3 = \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_l a_{kl}^2.$$

Hierin sind A_{kl} und a_{kl} die Unterdeterminanten 3. und 2. Grades von A. Da die Koeffizienten (19.) alle positiv sind, hat die Gleichung (18.) vier nicht nur *reelle* [1]), sondern auch *positive* Wurzeln $\lambda^2 = \lambda_i^2$.

6. *Bestimmung der Unbekannten.* Durch die Gleichungen (17.) sind zunächst *die Quadrate* $f_{ii}^2 = \lambda_i^2$ *der Koeffizienten* in (1.) und (2.) bestimmt. Aus den linearen Gleichungen (15.) oder (16.) ergeben sich dann zu jeder Wurzel $f_{ii}^2 = \lambda_i^2$ die Verhältnisse *der 4 Unbekannten* $x_l^{(i)}$ oder $x_k'^{(i)}$, während diese selbst mit Benutzung von (7.) und (8.) bis auf ein gemeinsames Vorzeichen bestimmt werden. Dabei bleiben die Orthogonalitätsbedingungen erfüllt. Denn aus den beiden Gleichungen mit $i \neq h$ aus (15.):

$$\sum_1^4{}_l\, b_{nl}\, x_l^{(i)} = \lambda_i^2\, x_n^{(i)},\quad \sum_1^4{}_l\, b_{nl}\, x_l^{(h)} = \lambda_h^2\, x_n^{(h)}$$

folgt durch Multiplikation mit $x_n^{(h)}$ und $x_n^{(i)}$ und Summation über n:

$$\sum_1^4{}_l \sum_1^4{}_n\, b_{nl}\, x_l^{(i)}\, x_n^{(h)} = \lambda_i^2 \sum_1^4{}_n\, x_n^{(i)}\, x_n^{(h)},\quad \sum_1^4{}_l \sum_1^4{}_n\, b_{nl}\, x_l^{(h)}\, x_n^{(i)} = \lambda_h^2 \sum_1^4{}_n\, x_n^{(i)}\, x_n^{(h)}.$$

Da hier wegen $b_{nl} = b_{ln}$ die Doppelsummen links gleich sind, so folgt für $\lambda_i^2 \neq \lambda_h^2$, daß wie § 1, (11.):

$$(20.)\qquad \sum_1^4{}_n\, x_n^{(i)}\, x_n^{(h)} = 0, \qquad (i \neq h).$$

Für $\lambda_i^2 = \lambda_h^2$ müßte diese Bedingung zugefügt werden [2]).

Da $x_l^{(i)}$ und $x_k'^{(i)}$ um ein gemeinsames Vorzeichen unbestimmt bleiben, können wir vorläufig (siehe nachher bei (26.)) $S = 1$, $S' = 1$ nehmen und müssen dann

[1]) St. II, § 155, 7.
[2]) St. II § 88, (14).

nach § 1, (5.), (10.) die Vorzeichen der Koeffizienten λ_i selbst für die kanonischen Gleichungen (1.) und (2.):

(21.) $$f = \lambda_1 y_1' y_1 + \lambda_2 y_2' y_2 + \lambda_3 y_3' y_3 + \lambda_4 y_4' y_4 = 0,$$

(22.) $$f = \lambda_1 v_1' y_1 + \lambda_2 v_2' y_2 + \lambda_3 v_3' y_3 + \lambda_4 v_4' y_4 = 0$$

so wählen, daß:

(23.) $$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = A.$$

Nun können aber $x_l^{(i)}$ und $x_k'^{(i)}$ *nicht unabhängig* voneinander aus (15.) und (16.) bestimmt werden, sondern sind durch die Gleichungen (5.), (6.) verbunden. Haben wir also etwa $x_l^{(i)}$ mit $f_{ii}^2 = \lambda_i^2$ aus (15.) bestimmt, so geben uns die Gleichungen (5.) mit $f_{ii} = \lambda_i$ die Werte $x_k'^{(i)}$. Nun folgt aber, wenn wir (15.) mit $x_n^{(h)}$, $h = i$ oder $\neq i$, multiplizieren und über n summieren:

(24.) $$\sum_1^4 l \sum_1^4 n\, b_{nl}\, x_l^{(i)}\, x_n^{(h)} = \lambda_i^2 \sum_1^4 n\, x_n^{(i)}\, x_n^{(h)}.$$

Ferner folgt durch Multiplikation der für i und h geschriebenen Gleichung (5.):

$$\sum_1^4 l\, a_{kl}\, x_l^{(i)} = \lambda_i\, x_k'^{(i)}, \quad \sum_1^4 n\, a_{kn}\, x_n^{(h)} = \lambda_h\, x_k'^{(h)}$$

und Summation über k mit Benutzung von (14.):

(25.) $$\sum_1^4 l \sum_1^4 n\, b_{nl}\, x_l^{(i)}\, x_n^{(h)} = \lambda_i \lambda_h \sum_1^4 k\, x_k'^{(i)}\, x_k'^{(h)}$$

und aus (24.) und (25.):

$$\lambda_i \sum_1^4 n\, x_n^{(i)}\, x_n^{(h)} = \lambda_h \sum_1^4 k\, x_k'^{(i)}\, x_k'^{(h)}, \quad h = i \text{ oder } \neq i.$$

Da nun die aus (15.) bestimmten $x_l^{(i)}$ den Bedingungen (7.) und (20.) genügen, so erfüllen auch *die alsdann aus* (5.) *bestimmten* $x_k'^{(i)}$ *die Orthogonalitätsbedingungen* [1]):

$$\sum_1^4 k\, x_k'^{(h)2} = 1, \quad \sum_1^4 k\, x_k'^{(i)}\, x_k'^{(h)} = 0.$$

Aus den 16 Gleichungen (5.) folgt überdies nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten:

(26.) $$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4\, S' = A\, S,$$

sodaß nach (23.) mit $S = 1$ auch $S' = 1$ ist.

So haben wir durch orthogonale Transformation mit der Determinante 1 *in jedem der beiden Räume die Korrelation und die Kollineation* § 1, (3.) *und* (6.) *auf die kanonische Form* (21.) *und* (22.) *gebracht.*

Wenn wir von der *Korrelation* (21.) mit der Determinante $A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$ ausgehen und die Koordinaten y_3 und y_4 des 1. Raumes vertauschen, so bedeutet das im Sinne von § 1, (5.) eine Transformation mit $S = -1$, $S' = 1$. Da aber die neue Gleichung:

(27.) $$f = \lambda_1 y_1' y_1 + \lambda_2 y_2' y_2 + \lambda_3 y_3' y_4 + \lambda_4 y_4' y_3 = 0$$

die Determinante $D = -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$ hat, so bleibt nach § 1, (5.) die Gleichung (23.) bestehen (vgl. später § 4, (38.); (46.)).

Auch die kanonischen Formen (27.) und:

---

[1]) Vgl. K. Aff. S. 44.

(28.) $$f = \lambda_1 y_1' y_2 + \lambda_2 y_2' y_1 + \lambda_3 y_3' y_4 + \lambda_4 y_4' y_3 = 0$$

können durch orthogonale Transformation in beiden Räumen hergestellt werden, wobei sich die Koeffizienten wiederum aus (17.) mit der Bedingung (23.) bestimmen und nur eine Vertauschung der Ecken $x_i^{(i)}$ eintritt. Dasselbe gilt auch für die *Kollineation* (22.).

7. *Andre Bedeutung der Transformation.* Schreiben wir die Gleichungen (5.) mit $f_{ii} = \lambda_i$ in der doppelten Bezeichnung:

(29.) $$\sum_1^4 k\, a_{ik}\, x_k^{(m)} = \lambda_m\, x_i'^{(m)}, \quad \sum_1^4 l\, a_{il}\, x_l^{(n)} = \lambda_n\, x_i'^{(n)},$$

so folgt durch Multiplikation dieser beiden Gleichungen (29.) und Summation über i:

$$\sum_1^4 k \sum_1^4 l \sum_1^4 i\, a_{ik}\, a_{il}\, x_k^{(m)}\, x_l^{(n)} = \lambda_m\, \lambda_n \sum_1^4 i\, x_i'^{(m)}\, x_i'^{(n)}$$

und mit Rücksicht auf (14.) und § 1, (11.):

(30.) $$\sum_1^4 k \sum_1^4 l\, b_{kl}\, x_k^{(m)}\, x_l^{(m)} = \lambda_m^2, \quad \sum_1^4 k \sum_1^4 l\, b_{kl}\, x_k^{(m)}\, x_l^{(n)} = 0, \qquad (m \neq n).$$

Nun sind aber nach § 1, (4.):

(31.) $$g_{mn} = \sum_1^4 k \sum_1^4 l\, b_{kl}\, x_k^{(m)}\, x_l^{(n)}$$

die neuen Koeffizienten der durch § 1, (2.) transformierten Flächengleichung:

$$g = \sum_1^4 k \sum_1^4 l\, b_{kl}\, x_k\, x_l = 0.$$

Entsprechendes wie aus (5.) folgt auch aus (6.), also:

Die orthogonalen Transformationen beider Räume, welche die Korrelation § 1, (1.) *in die kanonische Form* (21.) *überführen, sind dieselben, wie die, welche in jedem Raume je eine der Flächen*:

(32.) $$g = \sum_1^4 k \sum_1^4 l\, b_{kl}\, x_k\, x_l = 0, \qquad g' = \sum_1^4 k \sum_1^4 l\, b_{kl}'\, x_k'\, x_l' = 0$$

in die Form überführen [1]):

(33.) $$\begin{aligned} g &= \lambda_1^2 y_1^2 + \lambda_2^2 y_2^2 + \lambda_3^2 y_3^2 + \lambda_4^2 y_4^2 = 0, \\ g' &= \lambda_1^2 y_1'^2 + \lambda_2^2 y_2'^2 + \lambda_3^2 y_3'^2 + \lambda_4^2 y_4'^2 = 0. \end{aligned}$$

Nur die in (5.) und (6.) enthaltene Beziehung zwischen $x_l^{(i)}$ und $x_k'^{(i)}$ fällt dabei fort.

8. *Bedeutung der Flächen* g, g'. Nun ist nach (14.) und (32.):

$$g = \sum_1^4 k \sum_1^4 l \sum_1^4 i\, a_{ik}\, a_{il}\, x_k\, x_l = \sum_1^4 i \sum_1^4 k\, a_{ik}\, x_k \sum_1^4 l\, a_{il}\, x_l = \sum_1^4 i \left\{\sum_1^4 k\, a_{ik}\, x_k\right\}^2,$$

$$g' = \sum_1^4 k \sum_1^4 l \sum_1^4 i\, a_{ki}\, a_{li}\, x_k'\, x_l' = \sum_1^4 i \sum_1^4 k\, a_{ki}\, x_k' \sum_1^4 l\, a_{li}\, x_l' = \sum_1^4 i \left\{\sum_1^4 k\, a_{ki}\, x_k'\right\}^2,$$

oder da in der Korrelation § 1, (1.):

$$u_k' = \sum_1^4 l\, a_{kl}\, x_l, \qquad u_l = \sum_1^4 k\, a_{kl}\, x_k',$$

ist:

(34.) $$g = \sum_1^4 i\, u_i'^2, \qquad g' = \sum_1^4 i\, u_i^2.$$

Die Flächen (32.) *sind diejenigen Flächen des* 1. *und* 2. *Raumes, die den Flächen*:

[1]) Vgl. K. Aff. S. 39.

(35.) $u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2 + u_4'^2 = 0, \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 0$

des 2. *und* 1. *Raumes entsprechen.*

Da bei den benutzten *orthogonalen* Transformationen die Gleichungen der Flächen (35.) übergehen in:

(36.) $v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2 + v_4'^2 = 0, \qquad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = 0,$

so entsprechen ihnen in der Korrelation (21.) in der Tat die Flächen (33.).

9. *Das Entsprechende bei der Kollineation.* Die unter 7—8 für die Korrelation abgeleiteten Sätze gelten auch für die Kollineation in der Form:

Die orthogonalen Transformationen beider Räume, welche die Kollineation § 1, (6.) *in die kanonische Form* (22.) *überführen, sind dieselben, wie die, welche in jedem Raume je eine der Flächen:*

(37.) $g = \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_l b_{kl}\, x_k\, x_l = 0, \qquad g' = \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_l b'_{kl}\, u'_k\, u'_l = 0$

in die Form überführen:

(38.)
$$\begin{aligned} g &= \lambda_1^2 y_1^2 + \lambda_2^2 y_2^2 + \lambda_3^2 y_3^2 + \lambda_4^2 y_4^2 = 0, \\ g' &= \lambda_1^2 v_1'^2 + \lambda_2^2 v_2'^2 + \lambda_3^2 v_3'^2 + \lambda_4^2 v_4'^2 = 0. \end{aligned}$$

Die Flächen (37.) *aber sind diejenigen Flächen des* 1. *und* 2. *Raumes, die den Flächen:*

(39.) $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = 0, \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 0$

des 2. *und* 1. *Raumes entsprechen.*

§ 3. Übergang auf gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten.

1. *Transformation der Korrelation.* Bei Benutzung gewöhnlicher rechtwinkliger Koordinaten nimmt die Gleichung § 1, (1.) die Form an:

(1.)
$$\begin{aligned} f(x'x) &= a_{11}\, x'x + \cdots + a_{23}\, y'z + a_{32}\, z'y + \cdots \\ &\quad + a_{14}\, x't + a_{41}\, t'x + \cdots + a_{44}\, t't = 0. \end{aligned}$$

Führen wir nun in jedem Raume ein neues rechtwinkliges, wie das alte, positiv orientiertes Koordinatensystem ein, so haben wir die Transformationsformeln:

(2.)
$$\begin{cases} x = \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta + x_0 \tau \\ y = \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta + y_0 \tau \\ z = \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta + z_0 \tau \\ t = \qquad\qquad\qquad \tau, \end{cases}$$

(3.)
$$\begin{cases} x' = \alpha_1' \xi' + \alpha_2' \eta' + \alpha_3' \zeta' + x_0' \tau' \\ y' = \beta_1' \xi' + \beta_2' \eta' + \beta_3' \zeta' + y_0' \tau' \\ z' = \gamma_1' \xi' + \gamma_2' \eta' + \gamma_3' \zeta' + z_0' \tau' \\ t' = \qquad\qquad\qquad \tau', \end{cases}$$

durch welche die Gleichung (1.) übergeht in:

(4.) $f = f_{11}\, \xi'\xi + \cdots + f_{23}\, \eta'\zeta + f_{32}\, \zeta'\eta + \cdots + f_{14}\, \xi' + f_{41}\, \xi + \cdots + f_{44} = 0.$

2. *Die neuen Koeffizienten.* Um die neuen Koeffizienten zu bilden, haben wir in § 1, (4.) zu setzen:

(5.)
$$\begin{cases} x_1'^{(1)} = \alpha_1' & x_1'^{(2)} = \alpha_2' & x_1'^{(3)} = \alpha_3 & x_1'^{(4)} = x_0' & x_1^{(1)} = \alpha_1 & x_1^{(2)} = \alpha_2 & x_1^{(3)} = \alpha_3 & x_1^{(4)} = x_0 \\ x_2'^{(1)} = \beta_1' & x_2'^{(2)} = \beta_2' & x_2'^{(3)} = \beta_3' & x_2'^{(4)} = y_0' & x_2^{(1)} = \beta_1 & x_2^{(2)} = \beta_2 & x_2^{(3)} = \beta_3 & x_2^{(4)} = y_0 \\ x_3'^{(1)} = \gamma_1' & x_3'^{(2)} = \gamma_2' & x_3'^{(3)} = \gamma_3' & x_3'^{(4)} = z_0' & x_3^{(1)} = \gamma_1 & x_3^{(2)} = \gamma_2 & x_3^{(3)} = \gamma_3 & x_3^{(4)} = z_0 \\ x_4'^{(1)} = 0 & x_4'^{(2)} = 0 & x_4'^{(3)} = 0 & x_4'^{(4)} = 1 & x_4^{(1)} = 0 & x_4^{(2)} = 0 & x_4^{(3)} = 0 & x_4^{(4)} = 1. \end{cases}$$

Mit den Abkürzungen für $i = 1, 2, 3, 4$:

(6.)
$$\begin{cases} f_i(xyzt) = a_{i1}\, x + a_{i2}\, y + a_{i3}\, z + a_{i4}\, t, & h_i(xyz) = a_{i1}\, x + a_{i2}\, y + a_{i3}\, z, \\ f_i'(x'y'z't') = a_{1i}\, x' + a_{2i}\, y' + a_{3i}\, z' + a_{4i}\, t', & h_i'(x'y'z') = a_{1i}\, x' + a_{2i}\, y' + a_{3i}\, z' \end{cases}$$

erhalten wir für die Koeffizienten die Werte [1]):

$$(7)\quad \begin{cases} f_{11} = h_1'(\alpha_1'\beta_1'\gamma_1')\cdot\alpha_1 + h_2'(\alpha_1'\beta_1'\gamma_1')\cdot\beta_1 + h_3'(\alpha_1'\beta_1'\gamma_1')\cdot\gamma_1 \\ \quad = h_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\cdot\alpha_1' + h_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\cdot\beta_1' + h_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\cdot\gamma_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{23} = h_1'(\alpha_2'\beta_2'\gamma_2')\cdot\alpha_3 + h_2'(\alpha_2'\beta_2'\gamma_2')\cdot\beta_3 + h_3'(\alpha_2'\beta_2'\gamma_2')\cdot\gamma_3 \\ \quad = h_1(\alpha_3\beta_3\gamma_3)\cdot\alpha_2' + h_2(\alpha_3\beta_3\gamma_3)\cdot\beta_2' + h_3(\alpha_3\beta_3\gamma_3)\cdot\gamma_2' \\ f_{32} = h_1'(\alpha_3'\beta_3'\gamma_3')\cdot\alpha_2 + h_2'(\alpha_3'\beta_3'\gamma_3')\cdot\beta_2 + h_3'(\alpha_3'\beta_3'\gamma_3')\cdot\gamma_2 \\ \quad = h_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\cdot\alpha_3' + h_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\cdot\beta_3' + h_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\cdot\gamma_3' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{14} = h_1'(\alpha_1'\beta_1'\gamma_1')\cdot x_0 + h_2'(\alpha_1'\beta_1'\gamma_1')\cdot y_0 + h_3'(\alpha_1'\beta_1'\gamma_1')\cdot z_0 + h_4'(\alpha_1'\beta_1'\gamma_1') \\ \quad = f_1(x_0\,y_0\,z_0\,1)\cdot\alpha_1' + f_2(x_0\,y_0\,z_0\,1)\cdot\beta_1' + f_3(x_0\,y_0\,z_0\,1)\cdot\gamma_1' \\ f_{41} = f_1'(x_0'\,y_0'\,z_0'\,1)\cdot\alpha_1 + f_2'(x_0'\,y_0'\,z_0'\,1)\cdot\beta_1 + f_3'(x_0'\,y_0'\,z_0'\,1)\cdot\gamma_1 \\ \quad = h_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\cdot x_0' + h_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\cdot y_0' + h_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\,z_0' + h_4(\alpha_1\beta_1\gamma_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{44} = f_1'(x_0'\,y_0'\,z_0'\,1)\,x_0 + f_2'(x_0'\,y_0'\,z_0'\,1)\,y_0 + f_3'(x_0'\,y_0'\,z_0'\,1)\,z_0 + f_4'(x_0\,y_0\,z_0\,1) \\ \quad = f_1(x_0\,y_0\,z_0\,1)\,x_0' + \cdots \end{cases}$$

3. *Transformation der Kollineation.* Die Gleichung § 1, (6.) nimmt in gewöhnlichen Koordinaten die Form an:

$$(8.)\qquad f = a_{11}\,u'\,x + \cdots + a_{23}\,v'\,z + a_{32}\,w'\,y + \cdots + a_{14}\,u'\,t + a_{41}\,s'\,x + \cdots + a_{44}\,s'\,t = 0,$$

und die Transformationsformeln in beiden Räumen lauten, wenn wir die neuen *Ebenen*koordinaten im 2. Raume mit $\lambda', \mu', \nu', \sigma'$ bezeichnen:

$$(9.)\quad \begin{cases} x = \alpha_1\,\xi + \alpha_2\,\eta + \alpha_3\,\zeta + x_0\,\tau \\ y = \beta_1\,\xi + \beta_2\,\eta + \beta_3\,\zeta + y_0\,\tau \\ z = \gamma_1\,\xi + \gamma_2\,\eta + \gamma_3\,\zeta + z_0\,\tau \\ t = \tau, \end{cases} \qquad (10.)\quad \begin{cases} u' = \alpha_1'\,\lambda' + \alpha_2'\,\mu' + \alpha_3'\,\nu' \\ v' = \beta_1'\,\lambda' + \beta_2'\,\mu' + \beta_3'\,\nu' \\ w' = \gamma_1'\,\lambda' + \gamma_2'\,\mu' + \gamma_3'\,\nu' \\ s' = \xi_0'\,\lambda' + \eta_0'\,\mu' + \zeta_0'\,\nu' + \sigma', \end{cases}$$

wo [2]):

$$(11.)\quad \begin{cases} \xi_0' = -(\alpha_1'\,x_0' + \beta_1'\,y_0' + \gamma_1'\,z_0') \\ \eta_0' = -(\alpha_2'\,x_0' + \beta_2'\,y_0' + \gamma_2'\,z_0') \\ \zeta_0' = -(\alpha_3'\,x_0' + \beta_3'\,y_0' + \gamma_3'\,z_0'). \end{cases}$$

Damit geht die Gleichung (8.) über in:

$$(12.)\quad f_{11}\,\lambda'\,\xi + \cdots + f_{23}\,\mu'\,\zeta + f_{32}\,\nu'\,\eta + \cdots + f_{14}\,\lambda'\,\tau + f_{41}\,\sigma'\,\xi + \cdots + f_{44}\,\sigma'\,\tau = 0.$$

4. *Die neuen Koeffizienten.* In § 1, (9.) haben wir nun zu setzen:

$$(13.)\quad \begin{cases} u^{(1)} = \alpha_1' & u_1'^{(2)} = \alpha_2' & u_1'^{(3)} = \alpha_3' & u_1'^{(4)} = 0 & x_1^{(1)} = \alpha_1 & x^{(2)} = \alpha_2 & x_1^{(3)} = \alpha_3 & x_1^{(4)} = x_0 \\ u_2^{(1)} = \beta_1' & u_2'^{(2)} = \beta_2' & u_2'^{(3)} = \beta_3' & u_2'^{(4)} = 0 & x_2^{(1)} = \beta_1 & x_2^{(2)} = \beta_2 & x_2^{(3)} = \beta_3 & x_2^{(4)} = y_0 \\ u_3'^{(1)} = \gamma_1' & u_3'^{(2)} = \gamma_2' & u_3'^{(3)} = \gamma_3' & u_3'^{(4)} = 0 & x_3^{(1)} = \gamma_1 & x_3^{(2)} = \gamma_2 & x_3^{(3)} = \gamma_3 & x_3^{(4)} = z_0 \\ u_4'^{(1)} = \xi_0' & u_4'^{(2)} = \eta_0' & u_4'^{(3)} = \zeta_0' & u_4'^{(4)} = 1 & x_4^{(1)} = 0 & x_4^{(2)} = 0 & x_4^{(3)} = 0 & x_4^{(4)} = 1. \end{cases}$$

Damit wird unter Benutzung der Abkürzungen (6.):

---

[1]) Vgl. St. II § 66, (19)—(21).

[2]) St. I § 45, (24); (22).

$$(14.)\quad \begin{cases} f_{11} = f_1'(\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\xi_0')\cdot\alpha_1 + f_2'(\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\xi_0')\cdot\beta_1 + f_3'(\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\xi_0')\cdot\gamma_1 \\ \quad = h_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\cdot\alpha_1' + h_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\cdot\beta_1' + h_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\cdot\gamma_1' + h_4(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\cdot\xi_0' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{23} = f_1'(\alpha_2'\beta_2'\gamma_2'\eta_0')\cdot\alpha_3 + f_2'(\alpha_2'\beta_2'\gamma_2'\eta_0')\cdot\beta_3 + f_3'(\alpha_2'\beta_2'\gamma_2'\eta_0')\cdot\gamma_3 \\ \quad = h_1(\alpha_3\beta_3\gamma_3)\cdot\alpha_2' + h_2(\alpha_3\beta_3\gamma_3)\cdot\beta_2' + h_3(\alpha_3\beta_3\gamma_3)\cdot\gamma_2' + h_4(\alpha_3\beta_3\gamma_3)\cdot\eta_0' \\ f_{32} = f_1'(\alpha_3'\beta_3'\gamma_3'\zeta_0')\cdot\alpha_2 + f_2'(\alpha_3'\beta_3'\gamma_3'\zeta_0')\cdot\beta_2 + f_3'(\alpha_3'\beta_3'\gamma_3'\zeta_0')\cdot\gamma_2 \\ \quad = h_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\cdot\alpha_3' + h_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\cdot\beta_3' + h_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\cdot\gamma_3' + h_4(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\cdot\zeta_0' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{14} = f_1'(\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\xi_0')\cdot x_0 + f_2'(\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\xi_0')\cdot y_0 + f_3'(\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\xi_0')\cdot z_0 + f_4'(\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\xi_0') \\ \quad = f_1(x_0y_0z_01)\cdot\alpha_1' + f_2(x_0y_0z_01)\cdot\beta_1' + f_3(x_0y_0z_01)\cdot\gamma_1' + f_4(x_0y_0z_01)\cdot\xi_0' \\ f_{41} = h_4(\alpha_1\beta_1\gamma_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{44} = f_4(x_0y_0z_01). \end{cases}$$

5. *Korrelation und Kollineation.* Während bei der orthogonalen Transformation in *Tetraederkoordinaten*, wegen der Bedingungen § 1, (13.), Korrelation und Kollineation in völlig gleicher Weise in die kanonische Form § 2, (21.); (22.) übergingen, gestaltet sich die jetzige Transformation für Korrelation und Kollineation deshalb *verschieden*, weil die Bedingungen § 1, (13.) nur noch für die 3 *ersten* Zeilen und Kolonnen der Tabellen (5.) und (13.) erfüllt sind, während die 4. Zeilen und Kolonnen in ungleicher Weise von der Orthogonalität abweichen. Dies bedingt auch die Verschiedenheit der neuen Koeffizienten in (7.) und (14.).

§ 4. Die kanonischen Gleichungen der Korrelation.

1. *Die Hauptachsenrichtungen.* Die 9 ersten Koeffizienten § 3, (7.) sind unabhängig von den neuen Anfangspunkten $\Omega = x_0\,y_0\,z_0$ und $\Omega' = x_0'\,y_0'\,z_0'$ und *nur abhängig von den* 9 *Richtungskosinus* der neuen Achsen in jedem der beiden Räume. Um daher *die* 9 *ersten Glieder* der Gleichung § 3, (4.) auf die Form:

$$(1.)\qquad \lambda_1\,\xi'\xi + \lambda_2\,\eta'\eta + \lambda_3\,\zeta'\zeta$$

zu bringen, haben wir nur die *orthogonale* Transformation des § 2 mit *drei* statt mit *vier* Variabeln zu wiederholen. Entsprechend den *Grundgleichungen* § 2, (5.); (6.) erhalten wir dann mit $f_{ii} = \lambda_i$ für $i = 1, 2, 3$:

$$(2.)\quad \begin{cases} a_{11}\,\alpha_i + a_{12}\,\beta_i + a_{13}\,\gamma_i = \lambda_i\,\alpha_i' \\ a_{21}\,\alpha_i + a_{22}\,\beta_i + a_{23}\,\gamma_i = \lambda_i\,\beta_i' \\ a_{31}\,\alpha_i + a_{32}\,\beta_i + a_{33}\,\gamma_i = \lambda_i\,\gamma_i'. \end{cases} \qquad (3.)\quad \begin{cases} a_{11}\,\alpha_i' + a_{21}\,\beta_i' + a_{31}\,\gamma_i' = \lambda_i\,\alpha_i \\ a_{12}\,\alpha_i' + a_{22}\,\beta_i' + a_{32}\,\gamma_i' = \lambda_i\,\beta_i \\ a_{13}\,\alpha_i' + a_{23}\,\beta_i' + a_{33}\,\gamma_i' = \lambda_i\,\gamma_i. \end{cases}$$

Indem wir dann wieder die Größen § 2, (14.), aber die Summen nur auf $k, l = 1, 2, 3$ erstreckt, einführen, haben wir entsprechend den Gleichungen § 2, (15.); (16.):

$$(4.)\quad \begin{cases} (b_{11} - \lambda_i^2)\,\alpha_i + b_{12}\,\beta_i + b_{13}\,\gamma_i = 0 \\ b_{21}\,\alpha_i + (b_{22} - \lambda_i^2)\,\beta_i + b_{23}\,\gamma_i = 0 \\ b_{31}\,\alpha_i + b_{32}\,\beta_i + (b_{33} - \lambda_i^2)\,\gamma_i = 0 \\ \alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1, \end{cases} \qquad (5.)\quad \begin{cases} (b_{11}' - \lambda_i^2)\,\alpha_i' + b_{12}'\,\beta_i' + b_{13}'\,\gamma_i' = 0 \\ b_{21}'\,\alpha_i' + (b_{22}' - \lambda_i^2)\,\beta_i' + b_{23}'\,\gamma_i' = 0 \\ b_{31}'\,\alpha_i' + b_{32}'\,\beta_i' + (b_{33}' - \lambda_i^2)\,\gamma_i' = 0 \\ \alpha_i'^2 + \beta_i'^2 + \gamma_i'^2 = 1. \end{cases}$$

Die 3 Quadrate λ_i^2 sind die Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$(6.)\quad \mathrm{B}(\lambda^2) = \begin{vmatrix} b_{11}-\lambda^2 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22}-\lambda^2 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\lambda^2 \end{vmatrix} = \lambda^6 - B_2\lambda^4 + B_1\lambda^2 - B = 0.$$

Die entsprechende Gleichung mit b' für b ist dieselbe. Die Koeffizienten haben die Werte:

$$(7.)\qquad B = A_{44}^2,\ B_1 = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l a_{kl}^2,\quad B_2 = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l a_{kl}^2.$$

Zu jeder der *positiven reellen* Wurzeln $\lambda^2 = \lambda_i^2$ geben dann die Gleichungen (4.) und (5.) die Richtungskosinus $\alpha_i\,\beta_i\,\gamma_i$ und $\alpha_i'\,\beta_i'\,\gamma_i'$ mit der Beziehung (2.); (3.). Entsprechend § 2, (23.) sei:

$$(8.)\qquad \lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3 = A_{44}.$$

Die Gleichung § 3, (4.) *nimmt also durch bloße Verfügung über die Richtung der Achsen* ξ, η, ζ *und* ξ', η', ζ' *in beiden Räumen, ohne Rücksicht auf die Wahl der Anfangspunkte* Ω und Ω', *die Form an* [1]):

$$(9.)\qquad \begin{aligned} f = {} & \lambda_1\xi'\xi + \lambda_2\eta'\eta + \lambda_3\zeta'\zeta + f_{14}\xi' + f_{41}\xi \\ & + f_{24}\eta' + f_{42}\eta + f_{34}\zeta' + f_{43}\zeta + f_{44} = 0. \end{aligned}$$

Die Korrelation hat in jedem der beiden Räume 3 *im allgemeinen bestimmte, auf einander senkrechte Hauptachsenrichtungen.*

2. *Bestimmung der Anfangspunkte.* Durch Nullsetzen der Koeffizienten f_{14} bis f_{43} in (9.) ergeben sich aus § 3, (7.) mit den Abkürzungen, wie § 3, (6.):

$$(10.)\quad f_i^0 = a_{i1}x_0 + a_{i2}y_0 + a_{i3}z_0 + a_{i4},\quad f_i'^0 = a_{1i}x_0' + a_{2i}y_0' + a_{3i}z_0' + a_{4i}$$

die Gleichungen:

$$(11.)\quad \begin{cases} f_{14} = f_1^0\alpha_1' + f_2^0\beta_1' + f_3^0\gamma_1' = 0 & f_{41} = f_1'^0\alpha_1 + f_2'^0\beta_1 + f_3'^0\gamma_1 = 0 \\ f_{24} = f_1^0\alpha_2' + f_2^0\beta_2' + f_3^0\gamma_2' = 0 & f_{42} = f_1'^0\alpha_2 + f_2^0\beta_2 + f_3'^0\gamma_2 = 0 \\ f_{34} = f_1^0\alpha_3' + f_2^0\beta_3' + f_3^0\gamma_3' = 0, & f_{43} = f_1'^0\alpha_3 + f_2'^0\beta_3 + f_3'^0\gamma_3 = 0 \end{cases}$$

und daraus:

$$(12.)\qquad f_1^0 = 0,\ f_2^0 = 0,\ f_3^0 = 0,\quad f_1'^0 = 0,\ f_2'^0 = 0,\ f_3'^0 = 0.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen liefert, *wenn* $A_{44} \neq 0$ *ist*, für jeden der beiden Räume *einen bestimmten endlichen Mittelpunkt*:

$$(13.)\quad x_0 : y_0 : z_0 : 1 = A_{41} : A_{42} : A_{43} : A_{44},\ x_0 : y_0' : z_0' : 1 = A_{14} : A_{24} : A_{34} : A_{44}.$$

Dann wird aber nach § 3, (7.) mit Rücksicht auf (12.) und (13.):

$$(14.)\qquad f_{44} = f_1^0 x_0' + f_2^0 y_0 + f_3^0 z_0 + f_4^0 = f_4^0 = \frac{A}{A_{44}}.$$

Die allgemeine Gleichung § 3, (4.) *der Korrelation kann also für* $A_{44} \neq 0$ *auf die Form gebracht werden* [2]):

$$(15.)\qquad \lambda_1\xi'\xi + \lambda_2\eta'\eta + \lambda_3\zeta'\zeta + \frac{A}{A_{44}} = 0,$$

gleichviel ob $A \neq 0$ *oder* $A = 0$ *ist.*

3. *Die der Wurzel* 0 *entsprechenden Richtungen.* Für $A_{44} = 0$, $A \neq 0$ wird die eine Wurzel der Gleichung (6.), etwa $\lambda_3^2 = 0$, sodaß in (9.) das Glied $\lambda_3\,\zeta'\,\zeta$ fortfällt

---

[1]) St. II § 90, (12).

[2]) K. Korr. S. 218, (4), S. 221, (17).

und zwar allein durch Einführung der Hauptachsenrichtungen. Für *die zur Wurzel* $\lambda_3 = 0$ *gehörigen Hauptachsenrichtungen* geben dann die Gleichungen (2.) und (3.) mit $i = 3$:

$$(16.)\qquad \begin{cases} \tau\,\alpha_3 = A_{41},\ \tau\,\beta_3 = A_{42},\ \tau\,\gamma_3 = A_{43},\ \tau = \sqrt{A_{41}^2 + A_{42}^2 + A_{43}^2}, \\ \tau'\alpha_3' = A_{14},\ \tau'\beta_3' = A_{24},\ \tau'\gamma_3' = A_{34},\ \tau' = \sqrt{A_{14}^2 + A_{24}^2 + A_{34}^2}. \end{cases}$$

bei willkürlicher Wahl der Vorzeichen von τ und τ', oder auch mit $k = 1, 2, 3$:

$$(17.)\qquad \alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = \alpha_{k1} : \alpha_{k2} : \alpha_{k3},\quad \alpha_3' : \beta_3' : \gamma_3' = \alpha_{1k} : \alpha_{2k} : \alpha_{3k}.$$

4. *Die Koeffizienten* f_{34} *und* f_{43}. Da es nun für $A_{44} = 0$, $A \neq 0$ keine endlichen Punkte (13.) gibt, die den Gleichungen (12.) genügen, behalten wir dann von (11.) je nur die beiden ersten Forderungen bei und folgern aus ihnen, da $\beta_1'\gamma_2' - \beta_2'\gamma_1' = \alpha_3'$, usw. ist:

$$f_1^0 : f_2^0 : f_3^0 = \alpha_3' : \beta_3' : \gamma_3',\ f_1'^0 : f_2'^0 : f_3'^0 = \alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3$$

oder mit je einem Proportionalitätsfaktor ϱ', ϱ:

$$(18.)\qquad \begin{aligned} &f_1^0 + \varrho'\,\alpha_3' = 0,\ f_2^0 + \varrho'\,\beta_3' = 0,\ f_3^0 + \varrho'\,\gamma_3' = 0, \\ &f_1'^0 + \varrho\,\alpha_3 = 0,\ f_2'^0 + \varrho\,\beta_3 = 0,\ f_3'^0 + \varrho\,\gamma_3 = 0. \end{aligned}$$

Damit erhalten die Koeffizienten f_{34} und f_{43} in (11.) statt 0 die Werte:

$$(19.)\qquad f_{34} = -\varrho',\ f_{43} = -\varrho.$$

Die Gleichungen (18.) lauten ausführlich:

$$(20.)\qquad \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} + \varrho'\,\alpha_3' = 0 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} + \varrho'\,\beta_3' = 0 \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} + \varrho'\,\gamma_3' = 0, \\ a_{11}x_0' + a_{21}y_0' + a_{31}z_0' + a_{41} + \varrho\,\alpha_3 = 0 \\ a_{12}x_0' + a_{22}y_0' + a_{32}z_0' + a_{42} + \varrho\,\beta_3 = 0 \\ a_{13}x_0' + a_{23}y_0' + a_{33}z_0' + a_{43} + \varrho\,\gamma_3 = 0 \end{cases}$$

und geben, mit A_{14}, A_{24}, A_{34}, bezüglich A_{41}, A_{42}, A_{43} multipliziert und addiert:

$$A + \varrho'\,(A_{14}\alpha_3' + A_{24}\beta_3' + A_{34}\gamma_3') = 0,\quad A + \varrho\,(A_{41}\alpha_3 + A_{42}\beta_3 + A_{43}\gamma_3) = 0$$

oder nach (16.):

$$(21.)\qquad A + \varrho'\,\tau' = 0,\quad A + \varrho\,\tau = 0.$$

Damit folgt aus (19.) mit den aus (16.) zu entnehmenden Werten von τ, τ':

$$(22.)\qquad f_{34} = \frac{A}{\tau'},\quad f_{43} = \frac{A}{\tau}.$$

5. *Die Beweglichkeit von* Ω *und* Ω'. Mit den durch (21.) und (16.) bestimmten Werten von ϱ, ϱ' und $\alpha_3\,\beta_3\,\gamma_3$, $\alpha_3'\,\beta_3'\,\gamma_3'$ stellen die beiden Systeme von 3 Gleichungen (20.) je eine gerade Linie in laufenden Koordinaten $x_0\,y_0\,z_0$ und $x_0'\,y_0'\,z_0$ dar, auf welcher der Punkt Ω und Ω' liegen muß, damit die 4 Koeffizienten $f_{14}, f_{41}, f_{24}, f_{42}$ in (9.) verschwinden. Diese Linien haben, wie aus ihren Gleichungen (20.) hervorgeht, die bereits in (17.) bestimmte Richtung der Achsen ζ und ζ'. *Auf diesen Linien können also die Punkte* Ω *und* Ω' *beliebig gewählt werden*, wenn die Gleichung (9.) die Form erhalten soll:

$$(23.)\qquad \lambda_1\,\xi'\xi + \lambda_2\,\eta'\eta + \frac{A}{\tau'}\,\zeta' + \frac{A}{\tau}\,\zeta + f_{44} = 0.$$

Dabei ist nach § 1, (5.) für $S = S' = 1$:

$$-\lambda_1 \lambda_2 \frac{A^2}{\iota\iota'} = A \text{ oder } (24.) \quad -A\,\lambda_1\,\lambda_2 = \tau\tau'.$$

6. *Das konstante Glied.* Die weitere Forderung:

$$(25.) \qquad \begin{aligned} f_{44} = a_{11}\,x_0'\,x_0 + \cdots + a_{23}\,y_0'\,z_0 + a_{32}\,z_0'\,y_0 \\ + \cdots + a_{14}\,x_0' + a_{41}\,x_0 + \cdots + a_{44} = 0 \end{aligned}$$

legt nun den *zwei* Punkten Ω und Ω' nur noch die *eine* Bedingung auf, daß sie in der Korrelation *konjugiert* sind, also der eine auf der Gegenebene des andern liegt. Man kann also etwa Ω auf der ersten Geraden (20.) beliebig wählen und muß dann Ω' in den Schnittpunkt der zweiten Geraden (20.) mit der Gegenebene von Ω legen [1]).

Die Gleichung der Korrelation $A \neq 0$, $A_{44} = 0$ erhält alsdann immer die kanonische Form [2]):

$$(26.)\ \lambda_1\,\xi'\xi + \lambda_2\,\eta'\eta + \frac{A\,\zeta'}{\sqrt{A_{14}^2 + A_{24}^2 + A_{34}^2}} + \frac{A\,\zeta}{\sqrt{A_{41}^2 + A_{42}^2 + A_{43}^2}} = 0\ ^{3}).$$

7. *Beispiel des Nullsystems.* Wir nehmen in der Korrelation § 3, (1.):

$$(27.) \qquad a_{kl} = -a_{lk}$$

und lassen zunächst die beiden Räume $O\,x\,y\,z$ und $O'\,x'\,y'\,z'$ in *getrennter* Lage, wie bei den bisherigen allgemeinen Betrachtungen. In diesem Sonderfalle ist:

$$(28.) \qquad A = D^2,\ D = a_{23}\,a_{14} + a_{31}\,a_{24} + a_{12}\,a_{34},$$

und wir setzen noch:

$$(29.) \qquad E^2 = a_{23}^2 + a_{31}^2 + a_{12}^2,\ E = \sqrt{a_{23}^2 + a_{31}^2 + a_{12}^2}.$$

Da nun hier:

$$(30.) \quad \begin{cases} b_{11} = b_{11}' = a_1^2 + a_{12}^2,\ b_{22} = b_{22}' = a_{12}^2 + a_{23}^2,\ b_{33} = b_{33}' = a_{23}^2 + a_{31}^2, \\ b_{23} = b_{23}' = -a_{31}\,a_{12},\ b_{31} = b_{31}' = -a_{12}\,a_{23},\ b_{12} = b_{12}' = -a_{23}\,a_{31}, \end{cases}$$

so werden die Koeffizienten der beiden Gleichungssysteme (4.) und (5.) dieselben. Da ferner:

$$(31.)\ A_{44} = 0;\ \alpha_{11} = a_{23}^2,\ \alpha_{22} = a_{31}^2,\ \alpha_{33} = a_{12}^2,\ \alpha_{23} = a_{31}a_{12},\ \alpha_{31} = a_{12}a_{23},\ \alpha_{12} = a_{23}a_{31},$$

so wird aus (7.):

$$B = 0,\ B_1 = E^4,\ B_2 = 2\,E.$$

Die kubische Gleichung:

$$(32.) \qquad \mathrm{B}\,(\lambda^2) = \lambda^6 - B_2\,\lambda^4 + B_1\,\lambda^2 - B = \lambda^2\,(\lambda^2 - E^2)^2$$

hat daher eine verschwindende Wurzel $\lambda_3^2 = 0$ und eine Doppelwurzel $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = E^2$.

8. *Die der Wurzel 0 entsprechenden Richtungen.* Zur Wurzel $\lambda_3^2 = 0$ gehören nach (16.) die Hauptachsenrichtungen:

$$(33.) \quad \begin{cases} \iota\,\alpha_3 = A_{41} = -D\,a_{23},\ \tau\,\beta_3 = -D\,a_{31},\ \tau\,\gamma_3 = -D\,a_{12};\ \tau = \pm D\,E; \\ \iota'\alpha_3' = A_{14} = D\,a_{23},\ \tau'\beta_3' = D\,a_{31},\ \tau'\gamma_3' = D\,a_{12};\ \tau' = \pm D\,E. \end{cases}$$

---

[1]) Vgl. K. Korr. S. 225, (30).

[2]) K. Korr. S. 218, (5).

[3]) Vgl. die Koeffizienten beim Paraboloid, St. II § 97, (30); (7).

Wir nehmen sie beide als gleichgerichtet gegen ihre Ausgangssysteme $O\,x\,y\,z$ und $O'\,x'\,y'\,z'$ an, also etwa:

$$(34.) \qquad \alpha_3 = \alpha_3' = \frac{a_{23}}{E},\ \beta_3 = \beta_3' = \frac{a_{31}}{E},\ \gamma_3 = \gamma_3' = \frac{a_{12}}{E}$$

und müssen entsprechend:

$$(35.) \qquad \tau = -\,D\,E,\ \tau' = D\,E$$

nehmen. Die Koeffizienten (22.) werden dann wegen (28.):

$$(36.) \qquad f_{34} = \frac{D}{E},\quad f_{43} = -\,\frac{D}{E}.$$

Da nach (24.):

$$-\,A\,\lambda_1\,\lambda_2 = -\,D^2\,E^2 \text{ oder } \lambda_1\,\lambda_2 = E^2,$$

nehmen wir etwa:

$$(37.) \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = E$$

und erhalten schließlich aus (26.) die kanonische Form [1]):

$$(38.) \qquad E\,\xi'\,\xi + E\,\eta'\,\eta + \frac{D}{E}\,\zeta' - \frac{D}{E}\,\zeta = 0.$$

9. *Die der Doppelwurzel entsprechenden Richtungen.* Da für die Doppelwurzel $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$ auch alle Unterdeterminanten von (6.) verschwinden [2]), bleiben die Achsenrichtungen ξ, η oder ξ', η' aus (4.) und (5.) unbestimmt. Sie können irgend zwei untereinander rechtwinklige, auf ζ oder ζ' senkrechte Achsen sein. Wenn wir aber danach ξ, η so gewählt haben, daß $\Omega\,\xi\,\eta\,\zeta$ positiv orientiert ist, so sind dann ξ', η' aus (2.), (3.) für $i = 1, 2$ bestimmt, also bei bekannten $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ und $\alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2$ aus den Gleichungen:

$$(39.)\ \begin{cases} a_{12}\,\beta_1 - a_{31}\,\gamma_1 = E\,\alpha_1' \\ a_{23}\,\gamma_1 - a_{12}\,\alpha_1 = E\,\beta_1' \\ a_{31}\,\alpha_1 - a_{23}\,\beta_1 = E\,\gamma_1', \end{cases} \qquad (40.)\ \begin{cases} -\,a_{12}\,\beta_1' + a_{31}\,\gamma_1' = E\,\alpha_1 \\ -\,a_{23}\,\gamma_1' + a_{12}\,\alpha_1' = E\,\beta_1 \\ -\,a_{31}\,\alpha_1' + a_{23}\,\beta_1' = E\,\gamma_1, \end{cases}$$

$$(41.)\ \begin{cases} a_{12}\,\beta_2 - a_{31}\,\gamma_2 = E\,\alpha_2' \\ a_{23}\,\gamma_2 - a_{12}\,\alpha_2 = E\,\beta_2' \\ a_{31}\,\alpha_2 - a_{23}\,\beta_2 = E\,\gamma_2', \end{cases} \qquad (42.)\ \begin{cases} -\,a_{12}\,\beta_2' + a_{31}\,\gamma_2' = E\,\alpha_2 \\ -\,a_{23}\,\gamma_2' + a_{12}\,\alpha_2' = E\,\beta_2 \\ -\,a_{31}\,\alpha_2' + a_{23}\,\beta_2' = E\,\gamma_2. \end{cases}$$

Aus (39.) und (41.) folgt durch Multiplikation mit $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ und $\alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2$ und Addition:

$$\alpha_1'\,\alpha_1 + \beta_1'\,\beta_1 + \gamma_1'\,\gamma_1 = 0, \qquad \alpha_2'\,\alpha_2 + \beta_2'\,\beta_2 + \gamma_2'\,\gamma_2 = 0.$$

Denken wir uns also nunmehr *die beiden Räume so zusammengelegt*, daß $O\,x\,y\,z = O'\,x'\,y'\,z'$ wird, so muß $\xi' \perp \xi$, $\eta' \perp \eta$, und da ξ, η und $\xi', \eta' \perp \zeta = \zeta'$ sind, so muß mit $\delta, \varepsilon = \pm 1$ werden:

$$(43.)\ \alpha_1' = \varepsilon\,\alpha_2, \beta_1' = \varepsilon\,\beta_2, \gamma_1' = \varepsilon\,\gamma_2;\ \alpha_2' = \delta\,\alpha_1, \beta_2' = \delta\,\beta_1, \gamma_2' = \delta\,\gamma_1.$$

Diese Werte aber genügen den 4 Gleichungssystemen (39.)—(42.), übers Kreuz verglichen, nur dann, wenn $\delta = -\,\varepsilon$. Wir können also entweder $\varepsilon = -\,1, \delta = +\,1$ nehmen:

$$(44.)\ \alpha_1' = -\,\alpha_2,\ \beta_1' = -\,\beta_2,\ \gamma_1' = -\,\gamma_2;\ \alpha_2' = \alpha_1,\ \beta_2' = \beta_1,\ \gamma_2' = \gamma_1$$

oder $\varepsilon = 1$, $\delta = -\,1$. In beiden Fällen ist das durch das positiv orientierte System $\xi\,\eta\,\zeta$ bestimmte System $\xi'\,\eta'\,\zeta'$ auch positiv orientiert.

---

[1]) Vgl. K. Korr. S. 227, (34). [2]) St. II § 89, (23.).

Die beiden Gleichungssysteme (20.) geben mit Rücksicht auf (19.); (36.); (34.) und mit $x\,y\,z$ für $x_0\,y_0\,z_0$ und $x_0'\,y_0'\,z_0'$ beide dasselbe System:

$$(45.)\quad \begin{cases} a_{12}\,y - a_{31}\,z + a_{14} - \dfrac{D}{E^2}\,a_{23} = 0 \\ a_{23}\,z - a_{12}\,x + a_{24} - \dfrac{D}{E^2}\,a_{31} = 0 \\ a_{31}\,x - a_{23}\,y + a_{34} - \dfrac{D}{E^2}\,a_{12} = 0\,, \end{cases}$$

welches die *Hauptachse des Nullsystems* darstellt [1]), auf der wir dann $\Omega = \Omega'$ beliebig annehmen können.

10. *Die verschiedenen kanonischen Formen.* Wenn wir nun die beiden Systeme $O\,x\,y\,z$ und $O'\,x'\,y'\,z'$ vereinigt haben, auch Ω' und Ω und die Achse ζ' mit ζ zusammenfällt, so ist dagegen für die Form (38.) das Achsensystem $\xi\,\eta$ gegen $\xi'\,\eta'$ noch um $\frac{\pi}{2}$ im positiven Sinne der $\xi\,\eta$-Ebene gedreht. Beziehen wir also nun *beide Räume auf dasselbe System* $\mathfrak{Q}\,\xi\,\eta\,\zeta$, so müssen wir ξ', η' durch $-\eta', \xi'$ ersetzen und erhalten dann statt (38.) die Form:

$$(46.)\qquad E\,(\xi'\,\eta - \eta'\,\xi) + \frac{D}{E}\,(\zeta' - \zeta) = 0$$

mit den *gleichen invarianten Koeffizienten*, wie in (38.). Es ist die gewöhnliche kanonische Gleichung des Nullsystems [2]).

§ 5. Die kanonischen Gleichungen der Kollineation.

1. *Affinität und Korrelation.* Wenn die *Kollineation* § 3, (8.) mit $a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0$ eine *Affinität* wird, so ist in § 3, (6.) $h_4\,(x, y, z)$ identisch 0 und die 9 ersten Koeffizienten § 3, (14.) in ihrer 2. Darstellung werden dieselben wie in § 3, (7.).

Die Bestimmung der drei Hauptachsenrichtungen beider Räume ist also genau dieselbe wie bei der Korrelation in § 4, 1. Da nun in § 3, (14.) auch $f_{41} = f_{42} = f_{43} = 0$ wird, und man ohne Beschränkung $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$, $a_{44} = 1$ setzen und die alten Anfangspunkte O und O' beibehalten kann ($x_0 = y_0 = z_0 = x_0' = y_0' = z_0' = 0$), so erhält man mit der Bestimmung der Hauptachsenrichtungen bereits die *kanonische Gleichung der Affinität* [3]):

$$\lambda_1\,\lambda'\,\xi + \lambda_2\,\mu'\,\eta + \lambda_3\,\nu'\,\zeta + 1 = 0\,,$$

entsprechend § 4, (15.) und § 3, (12.).

2. *Kanonische Gleichung der Kollineation.* Nach der doppelten Darstellung der Kollineation § 3, (8.):

$$(1.)\qquad \begin{aligned} f = {} & a_{11}\,u'\,x + \cdots + a_{23}\,v'\,z + a_{32}\,w'\,y + \cdots \\ & + a_{14}\,u'\,t + a_{41}\,s'\,x + \cdots + a_{44}\,s'\,t = 0, \end{aligned}$$

$$(2.)\qquad \begin{aligned} A\,F = {} & A_{11}\,x'\,u + \cdots + A_{23}\,y'\,w + A_{32}\,z'\,v + \cdots \\ & + A_{14}\,x'\,s + A_{41}\,t'\,u + \cdots + A_{44}\,t'\,s = 0 \end{aligned}$$

[1]) St. II § 87. (11); (10).
[2]) St. II § 87, (19).
[3]) K. Aff. S. 40, (13).

entspricht einer Vertauschung der beiden Räume eine solche von a_{kl} und A_{lk}. Indem wir nun die Fluchtebenen beider Räume:

(3.) $a_{41}\,x + a_{42}\,y + a_{43}\,z + a_{44}\,t = 0,\ A_{14}\,x' + A_{24}\,y' + A_{34}\,z' + A_{44}\,t' = 0$

als endlich annehmen, setzen wir voraus, daß:

(4.) $\qquad a_0^2 = a_{41}^2 + a_{42}^2 + a_{43}^2 \neq 0,\quad A_0^2 = A_{14}^2 + A_{24}^2 + A_{34}^2 \neq 0.$

Da dann nach § 3, (6.); (14.) die Koeffizienten $f_{41} = h_4\,(\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1)$, $f_{42} = h_4\,(\alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2)$, $f_{43} = h_4\,(\alpha_3\,\beta_3\,\gamma_3)$ niemals alle drei verschwinden können, suchen wir die kanonische Form der Gleichung (1.):

(5.) $\qquad f_{11}\,\lambda'\,\xi + f_{22}\,\mu'\,\eta + f_{34}\,\nu'\,\tau + f_{43}\,\sigma'\,\zeta = 0$

herzustellen [1]).

3. *Die Normalen der Fluchtebenen.* Aus den von § 3, (14.) entnommenen Gleichungen:

$$(6.)\quad \begin{cases} f_{41} = a_{41}\,\alpha_1 + a_{42}\,\beta_1 + a_{43}\,\gamma_1 = 0 \\ f_{42} = a_{41}\,\alpha_2 + a_{42}\,\beta_2 + a_{43}\,\gamma_2 = 0 \\ f_{43} = a_{41}\,\alpha_3 + a_{42}\,\beta_3 + a_{43}\,\gamma_3 = f_{43} \end{cases}$$

folgt durch Multiplikation mit $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$, $\beta_1\,\beta_2\,\beta_3$, $\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3$ und Addition:

$$a_{41} = f_{43}\,\alpha_3,\ a_{42} = f_{43}\,\beta_3,\ a_{43} = f_{43}\,\gamma_3$$

und hieraus durch Quadrieren und Addieren:

$$(7.)\qquad f_{43} = a_0,\ a_0 = \sqrt{a_{41}^2 + a_{42}^2 + a_{43}^2},$$

$$(8.)\qquad \alpha_3 = \frac{a_{41}}{a_0},\ \beta_3 = \frac{a_{42}}{a_0},\ \gamma_3 = \frac{a_{43}}{a_0}.$$

Ferner folgt aus den Gleichungen von § 3, (14.):

$$(9.)\quad \begin{cases} f_{31} = f_1'\,(\alpha_3'\,\beta_3\,\gamma_3'\,\zeta_0')\,\alpha_1 + f_2'\,(\alpha_3'\,\beta_3'\,\gamma_3'\,\zeta_0')\,\beta_1 + f_3'\,(\alpha_3'\,\beta_3'\,\gamma_3'\,\zeta_0')\,\gamma_1 = 0 \\ f_{32} = f_1'\,(\alpha_3'\,\beta_3'\,\gamma_3'\,\zeta_0')\,\alpha_2 + f_2'\,(\alpha_3'\,\beta_3'\,\gamma_3'\,\zeta_0')\,\beta_2 + f_3'\,(\alpha_3'\,\beta_3'\,\gamma_3'\,\zeta_0')\,\gamma_2 = 0 \\ f_{33} = f_1'\,(\alpha_3'\,\beta_3'\,\gamma_3'\,\zeta_0')\,\alpha_3 + f_2'\,(\alpha_3'\,\beta_3'\,\gamma_3'\,\zeta_0')\,\beta_3 + f_3'\,(\alpha_3'\,\beta_3'\,\gamma_3'\,\zeta_0')\,\gamma_3 = 0 \end{cases}$$

sofort: $f_1' = 0,\ f_2' = 0,\ f_3' = 0$ oder ausführlich:

$$(10.)\quad \begin{cases} a_{11}\,\alpha_3' + a_{21}\,\beta_3' + a_{31}\,\gamma_3' + a_{41}\,\zeta_0' = 0 \\ a_{12}\,\alpha_3' + a_{22}\,\beta_3' + a_{32}\,\gamma_3' + a_{42}\,\zeta_0' = 0 \\ a_{13}\,\alpha_3' + a_{23}\,\beta_3' + a_{33}\,\gamma_3' + a_{43}\,\zeta_0' = 0 \end{cases}$$

und daraus:

$$(11.)\qquad \alpha_3' : \beta_3' : \gamma_3' : \zeta_0' = A_{14} : A_{24} : A_{34} : A_{44},$$

also:

$$(12.)\ \alpha_3' = \frac{A_{14}}{A_0},\ \beta_3' = \frac{A_{24}}{A_0},\ \gamma_3' = \frac{A_{34}}{A_0},\ A_0 = \sqrt{A_{14}^2 + A_{24}^2 + A_{34}^2}.$$

Die neuen Achsen ζ und ζ' *sind also die Normalen der beiden Fluchtebenen* (3.).

4. *Die neuen Anfangspunkte.* Da nach (6.) $h_4\,(\alpha_3\,\beta_3\,\gamma_3) = f_{43}$, so nehmen wir aus § 3, (14.):

$$(13.)\quad \begin{cases} f_{13} = h_1\,(\alpha_3\,\beta_3\,\gamma_3)\,\alpha_1' + h_2\,(\alpha_3\,\beta_3\,\gamma_3)\,\beta_1' + h_3\,(\alpha_3\,\beta_3\,\gamma_3)\,\gamma_1' + f_{43}\,\xi_0' = 0 \\ f_{23} = h_1\,(\alpha_3\,\beta_3\,\gamma_3)\,\alpha_2' + h_2\,(\alpha_3\,\beta_3\,\gamma_3)\,\beta_2' + h_3\,(\alpha_3\,\beta_3\,\gamma_3)\,\gamma_2' + f_{43}\,\eta_0' = 0 \\ f_{33} = h_1\,(\alpha_3\,\beta_3\,\gamma_3)\,\alpha_3' + h_2\,(\alpha_3\,\beta_3\,\gamma_3)\,\beta_3' + h_3\,(\alpha_3\,\beta_3\,\gamma_3)\,\gamma_3' + f_{43}\,\zeta_0' = 0 \end{cases}$$

---

[1]) K. Koll. S. 4, (11).

und hieraus im Hinblick auf § 3, (11.):

$$(14.)\qquad \begin{cases} a_{11}\,\alpha_3 + a_{12}\,\beta_3 + a_{13}\,\gamma_3 - f_{43}\,x_0' = 0 \\ a_{21}\,\alpha_3 + a_{22}\,\beta_3 + a_{23}\,\gamma_3 - f_{43}\,y_0' = 0 \\ a_{31}\,\alpha_3 + a_{32}\,\beta_3 + a_{33}\,\gamma_3 - f_{43}\,z_0' = 0 \end{cases}$$

oder nach (7.) und (8.) [1]):

$$(15.)\qquad x_0' = \frac{a_{11}\,a_{41} + a_{12}\,a_{42} + a_{13}\,a_{43}}{a_0^2},\quad y_0' = \frac{a_{21}\,a_{41} + a_{22}\,a_{42} + a_{23}\,a_{43}}{a_0^2},$$
$$z_0' = \frac{a_{31}\,a_{41} + a_{32}\,a_{42} + a_{33}\,a_{43}}{a_0^2}.$$

Wir nehmen ferner die mit $f_{44} = 0$ reduzierten Gleichungen:

$$(16.)\qquad \begin{cases} f_{14} = f_1\,(x_0\,y_0\,z_0\,1)\,\alpha_1' + f_2\,(x_0\,y_0\,z_0\,1)\,\beta_1' + f_3\,(x_0\,y_0\,z_0\,1)\,\gamma_1' = 0 \\ f_{24} = f_1\,(x_0\,y_0\,z_0\,1)\,\alpha_2' + f_2\,(x_0\,y_0\,z_0\,1)\,\beta_2' + f_3\,(x_0\,y_0\,z_0\,1)\,\gamma_2' = 0 \\ f_{34} = f_1\,(x_0\,y_0\,z_0\,1)\,\alpha_3' + f_2\,(x_0\,y_0\,z_0\,1)\,\beta_3' + f_3\,(x_0\,y_0\,z_0\,1)\,\gamma_3' = f_{34} \end{cases}$$

und erhalten durch Multiplikation mit $\alpha_1'\,\alpha_2'\,\alpha_3'$, $\beta_1'\,\beta_2'\,\beta_3'$, $\gamma_1'\,\gamma_2'\,\gamma_3'$ und Addition:

$$(17.)\qquad \begin{cases} a_{11}\,x_0 + a_{12}\,y_0 + a_{13}\,z_0 + a_{14} = f_{34}\,\alpha_3' \\ a_{21}\,x_0 + a_{22}\,y_0 + a_{23}\,z_0 + a_{24} = f_{34}\,\beta_3' \\ a_{31}\,x_0 + a_{32}\,y_0 + a_{33}\,z_0 + a_{34} = f_{34}\,\gamma_3'. \end{cases}$$

Dazu nehmen wir noch:

$$(17'.)\qquad f_{44} = a_{41}\,x_0 + a_{42}\,y_0 + a_{43}\,z_0 + a_{44} = 0.$$

Aus diesen vier Gleichungen folgt:

$$(18.)\qquad \begin{cases} A\,x_0 = (A_{11}\,\alpha_3' + A_{21}\,\beta_3' + A_{31}\,\gamma_3')\,f_{34} \\ A\,y_0 = (A_{12}\,\alpha_3' + A_{22}\,\beta_3' + A_{32}\,\gamma_3')\,f_{34} \\ A\,z_0 = (A_{13}\,\alpha_3' + A_{23}\,\beta_3' + A_{33}\,\gamma_3')\,f_{34} \\ A \quad = (A_{14}\,\alpha_3' + A_{24}\,\beta_3' + A_{34}\,\gamma_3')\,f_{34}. \end{cases}$$

Die letzte Gleichung gibt nach (12.)

$$(19.)\qquad f_{34} = \frac{A}{A_0}$$

und danach die übrigen [1]):

$$(20.)\qquad x_0 = \frac{A_{11}\,A_{14} + A_{21}\,A_{24} + A_{31}\,A_{34}}{A_0^2},\quad y_0 = \frac{A_{12}\,A_{14} + A_{22}\,A_{24} + A_{32}\,A_{34}}{A_0^2},$$
$$z_0 = \frac{A_{13}\,A_{14} + A_{23}\,A_{24} + A_{33}\,A_{34}}{A_0^2}.$$

In (15.) und (20.) sind *die neuen Anfangspunkte Ω und Ω' für beide Räume bestimmt.* Sie liegen nach der Gleichung (17'.) und mit Rücksicht auf die Bemerkung zu (2.) *in den Fluchtebenen.* Ferner sind in (7.) und (19.) die beiden letzten Koeffizienten in (5.) bestimmt. Es bleiben noch zu bestimmen die Richtungskosinus der Achsen ξ, η und ξ', η' und die Koeffizienten f_{11} und f_{22}.

5. *Die verbundenen Gleichungen.* Wir entnehmen zuerst aus den Gleichungen von § 3, (14.) mit $h_4\,(\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1) = 0$:

---

[1]) K. Koll. S. 21, (63).

$$(21.)\quad \begin{cases} f_{11} = h_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\,\alpha_1' + h_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\,\beta_1' + h_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\,\gamma_1' = f_{11} \\ f_{21} = h_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\,\alpha_2' + h_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\,\beta_2' + h_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\,\gamma_2' = 0 \\ f_{31} = h_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\,\alpha_3' + h_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\,\beta_3' + h_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\,\gamma_3' = 0 \end{cases}$$

und aus den entsprechenden $f_{12} = 0$, $f_{22} = f_{22}$, $f_{32} = 0$ bezüglich:

$$(22.)\quad \begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\beta_1 + a_{13}\gamma_1 = f_{11}\alpha_1' & a_{11}\alpha_2 + a_{12}\beta_2 + a_{13}\gamma_2 = f_{22}\alpha_2' \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\beta_1 + a_{23}\gamma_1 = f_{11}\beta_1' & a_{21}\alpha_2 + a_{22}\beta_2 + a_{23}\gamma_2 = f_{22}\beta_2' \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\beta_1 + a_{33}\gamma_1 = f_{11}\gamma_1', & a_{31}\alpha_2 + a_{32}\beta_2 + a_{33}\gamma_2 = f_{22}\gamma_2' \end{cases}$$

übereinstimmend mit § 4, (2.) $i = 1, 2$.

Weiter erhalten wir aus § 3, (14.):

$$(23.)\quad \begin{cases} f_{11} = f_1'(\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\xi_0')\,\alpha_1 + f_2'(\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\xi_0')\,\beta_1 + f_3'(\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\xi_0')\,\gamma_1 = f_{11} \\ f_{12} = f_1'(\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\xi_0')\,\alpha_2 + f_2'(\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\xi_0')\,\beta_2 + f_3'(\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\xi_0')\,\gamma_2 = 0 \\ f_{13} = f_1'(\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\xi_0')\,\alpha_3 + f_2'(\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\xi_0')\,\beta_3 + f_3'(\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\xi_0')\,\gamma_3 = 0 \end{cases}$$

und daraus, wie aus den entsprechenden Gleichungen $f_{21} = 0$, $f_{22} = f_{22}$, $f_{23} = 0$:

$$(24.)\quad \begin{cases} a_{11}\alpha_1' + a_{21}\beta_1' + a_{31}\gamma_1' + a_{41}\xi_0' = f_{11}\alpha_1 & a_{11}\alpha_2' + a_{21}\beta_2' + a_{31}\gamma_2' + a_{41}\eta_0' = f_{22}\alpha_2 \\ a_{12}\alpha_1' + a_{22}\beta_1' + a_{32}\gamma_1' + a_{42}\xi_0' = f_{11}\beta_1 & a_{12}\alpha_2' + a_{22}\beta_2' + a_{32}\gamma_2' + a_{42}\eta_0' = f_{22}\beta_2 \\ a_{13}\alpha_1' + a_{23}\beta_1' + a_{33}\gamma_1' + a_{43}\xi_0' = f_{11}\gamma_1; & a_{13}\alpha_2' + a_{23}\beta_2' + a_{33}\gamma_2' + a_{43}\eta_0' = f_{22}\gamma_2, \end{cases}$$

nunmehr *abweichend* von § 4, (3.) $i = 1, 2$.

6. *Trennung der Unbekannten.* Aus den 3 ersten Gleichungen (22.) folgt nun durch Multiplikation mit a_{11}, a_{21}, a_{31} und Addition unter Benutzung von § 2, (14.) mit $k = 1, 2, 3$:

$$b_{11}\alpha_1 + b_{12}\beta_1 + b_{13}\gamma_1 = f_{11}(a_{11}\alpha_1' + a_{21}\beta_1' + a_{31}\gamma_1')$$

oder nach (24.):

$$b_{11}\alpha_1 + b_{12}\beta_1 + b_{13}\gamma_1 = f_{11}(f_{11}\alpha_1 - a_{41}\xi_0').$$

Indem wir die entsprechenden Gleichungen hinzufügen und $\omega_1 = f_{11}\xi_0'$, $\omega_2 = f_{22}\eta_0'$ als neue Unbekannte einführen, erhalten wir mit Hinzunahme der beiden 1. Gleichungen (6.):

$$(25.)\quad \begin{cases} (b_{11} - f_{ii}^2)\,\alpha_i + b_{12}\beta_i + b_{13}\gamma_i + a_{41}\omega_i = 0 \\ b_{21}\alpha_i + (b_{22} - f_{ii}^2)\,\beta_i + b_{23}\gamma_i + a_{42}\omega_i = 0 \\ b_{31}\alpha_i + b_{32}\beta_i + (b_{33} - f_{ii}^2)\,\gamma_i + a_{43}\omega_i = 0 \\ a_{41}\alpha_i + a_{42}\beta_i + a_{43}\gamma_i = 0 \end{cases}$$

für $i = 1, 2$.

7. *Die Determinantengleichung.* Hiernach *sind* $f_{11}^2 = \lambda_1^2$, $f_{22}^2 = \lambda_2^2$ *die Wurzeln der in* λ^2 *quadratischen Gleichung* [1]):

$$(26.)\quad \mathrm{B}(\lambda^2) = \begin{vmatrix} b_{11} - \lambda^2 & b_{12} & b_{13} & a_{41} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda^2 & b_{23} & a_{43} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - \lambda^2 & a_{43} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} = -B_2\lambda^4 + B_1\lambda^2 - B = 0.$$

Die Koeffizienten sind mit Rücksicht auf § 2, (14.), doch k nur über 1, 2, 3 laufend angenommen:

$$B_2 = a_{41}^2 + a_{42}^2 + a_{43}^2,$$

---

[1]) K. Koll. S. 23, (70).

$$B_1 = (a_{12}\,a_{43} - a_{13}\,a_{42})^2 + (a_{22}\,a_{43} - a_{23}\,a_{42})^2 + (a_{32}\,a_{43} - a_{33}\,a_{42})^2$$
$$+ (a_{13}\,a_{41} - a_{11}\,a_{43})^2 + (a_{23}\,a_{41} - a_{21}\,a_{43})^2 + (a_{33}\,a_{41} - a_{31}\,a_{43})^2$$
$$+ (a_{11}\,a_{42} - a_{12}\,a_{41})^2 + (a_{21}\,a_{42} - a_{22}\,a_{41})^2 + (a_{31}\,a_{42} - a_{32}\,a_{41})^2,$$
$$B = (\alpha_{11}\,a_{41} + a_{12}\,a_{42} + a_{13}\,a_{43})^2 + (a_{21}\,a_{41} + a_{22}\,a_{42} + a_{23}\,a_{43})^2$$
$$+ (a_{31}\,a_{41} + a_{32}\,a_{42} + a_{33}\,a_{43})^2$$

mit der bei § 2, (19.) festgesetzten Bedeutung von a_{kl}, oder in kürzerer Darstellung:

$$(27.)\quad \begin{cases} B_2 = a_{41}^2 + a_{42}^2 + a_{43}^2 = a_0^2 \\ B_1 = a_{41}^2 + a_{51}^2 + a_{61}^2 + a_{42}^2 + a_{52}^2 + a_{62}^2 + a_{43}^2 + a_{53}^2 + a_{63}^2 \\ B = A_{14}^2 + A_{24}^2 + A_{34}^2 = A_0^2. \end{cases}$$

Die beiden Wurzeln λ_1^2 und λ_2^2 sind daher *stets reell*[1]) *und positiv*, ihr Produkt ist nach (26.) und (27.):

$$(28.)\qquad \lambda_1^2\,\lambda_2^2 = \frac{A_0^2}{a_0^2}.$$

8. *Die übrigen Unbekannten.* Mit $f_{ii}^2 = \lambda_i^2$ sind dann aus (25.) die Verhältnisse $a_i : \beta_i : \gamma_i : \omega_i$ und damit die Richtungskosinus $a_i\,\beta_i\,\gamma_i$ der beiden Achsen ξ und η je bis auf ein gemeinsames Vorzeichen bestimmt. Wir orientieren das System $\Omega\,\xi\,\eta\,\zeta$, für das die ζ-Achse durch (8.) mit Verfügung über das Vorzeichen von a_0 gegeben ist, positiv.

Nunmehr sind durch die Gleichungen (22.) die Richtungskosinus der Achsen ξ' und η' nach Wahl der Vorzeichen von $f_{ii} = \lambda_i$ (vgl. nachher (31.)) eindeutig festgelegt. In der Tat können wir, ebenso wie bei § 2, (24.); (25.), auch hier aus (25.) und (22.) beweisen, daß $a_1'\,\beta_1'\,\gamma_1'$ und $a_2'\,\beta_2'\,\gamma_2'$ Richtungskosinus zweier rechtwinkliger Achsen sind. Dabei fällt die in (25.) auftretende Unbekannte ω_i, bei Herstellung der der Gleichung § 2, (24.) entsprechenden, wegen der vierten Gleichung (25.) von selbst heraus. Zur positiven Orientierung des Systems $\Omega'\,\xi'\,\eta'\,\zeta'$ kann noch das Vorzeichen von A_0 in (12.) dienen (vgl. (31.)).

Mit Einführung der beiden neuen Systeme $\Omega\,\xi\,\eta\,\zeta$ und $\Omega'\,\xi'\,\eta'\,\zeta'$ in den beiden Räumen ist dann die in (5.) verlangte *kanonische Gleichung der Kollineation* hergestellt:

$$(29.)\qquad \lambda_1\,\lambda'\,\xi + \lambda_2\,\mu'\,\eta + \frac{A}{A_0}\,\nu'\,\tau + a_0\,\sigma'\,\zeta = 0$$

oder in ungeschlossener Form:

$$(30.)\qquad \xi' = \lambda_1\xi,\ \eta' = \lambda_2\eta,\ \zeta' = \frac{A}{A_0}\,\tau,\ \tau' = a_0\zeta.$$

Für die Form (5.) ist nun nach § 1, (10.):

$$D = -\,f_{11}\,f_{22}\,f_{34}\,f_{43} = S\,S'^3\,A$$

und in der Bezeichnung von (29.) mit $S = 1$:

$$-\,\lambda_1\,\lambda_2\,\frac{A}{A_0}\,a_0 = S'^3\,A.$$

Wir müssen also, um $S' = 1$ zu erhalten, die Wahl der Vorzeichen von λ_1, λ_2, A_0 so treffen, daß neben (28.):

---

[1]) St. II § 109, (21).

(31.) $$-\lambda_1 \lambda_2 = \frac{A_0}{a_0}.$$

9. *Die Gleichberechtigung beider Räume.* Die Form der Gleichungen (22.) und (24.) für $a_i\, \beta_i\, \gamma_i$ und $a_i'\, \beta_i'\, \gamma_i'$ ist im Gegensatz zu § 2, (5.); (6.) verschieden. Um der Gleichberechtigung beider Gruppen von Unbekannten zu entsprechen, müßten wir, was hier nur kurz angedeutet sei, ebenso wie die Gleichung (1.) in die Form (5.), auch die Gleichung (2.) in die Form:

(32.) $$F_{11}\, \xi' \lambda + F_{22}\, \eta' \mu + F_{34}\, \zeta' \sigma + F_{43}\, \tau' \nu = 0$$

bringen. Wir würden dann entsprechend (7.) und (19.) erhalten:

(33.) $$F_{34} = A_0,\ F_{43} = \frac{A}{a_0}.$$

Wir würden weiter, indem wir neben den Abkürzungen:

(34.) $$b_{ik} = \sum_1^3{}^h\, a_{hi}\, a_{hk}$$

die entsprechenden:

(35.) $$B_{ik}' = \sum_1^3{}^h\, A_{ih}\, A_{kh}$$

einführen, neben (25.) für $i = 1, 2$ erhalten:

(36.) $$\begin{cases} (B_{11}' - F_{ii}^2)\, a_i' + B_{12}'\, \beta_i' + B_{13}'\, \gamma_i' + A_{14}\, \omega_i' = 0 \\ B_{21}'\, a_i' + (B_{22}' - F_{ii}^2)\, \beta_i' + B_{23}'\, \gamma_i' + A_{24}\, \omega_i' = 0 \\ B_{31}'\, a_i' + B_{32}'\, \beta_i' + (B_{33}' - F_{ii}^2)\, \gamma_i' + A_{34}\, \omega_i' = 0 \\ A_{14}\, a_i' + A_{24}\, \beta_i' + A_{34}\, \gamma_i' = 0 \end{cases}$$

mit einer neuen Unbekannten ω_i'. Daraus folgt dann, daß F_{11}^2 und F_{22}^2 die Wurzeln der in μ^2 quadratischen Gleichung sind:

(37.) $$\begin{vmatrix} B_{11}' - \mu^2 & B_{12}' & B_{13}' & A_{14} \\ B_{21}' & B_{22}' - \mu^2 & B_{23}' & A_{24} \\ B_{31}' & B_{32}' & B_{33}' - \mu^2 & A_{34} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

deren Entwicklung mit den Koeffizienten (27.) gibt:

(38.) $$-B\, \mu^4 + A^2 B_1\, \mu^2 - A^4 B_2 = 0.$$

Die Gleichung ist daher mit $\mu^2 = \frac{A^2}{\lambda^2}$ dieselbe wie (26.). Ihre Wurzeln sind $\mu_i^2 = F_{ii}^2 = \frac{A^2}{\lambda_i^2}$. Damit sind auch F_{11} und F_{22} in (32.) auf λ_1 und λ_2 zurückgeführt, und wir erhalten aus (32.):

(39.) $$\xi = \frac{A\, \xi'}{\lambda_1},\ \eta = \frac{A\, \eta'}{\lambda_2},\ \zeta = \frac{A}{a_0}\tau',\ \tau = A_0\, \zeta',$$

übereinstimmend mit (30.).

10. *Andre Bedeutung der Transformation.* Dem imaginären Kugelkreis des 2. Raumes:

(40.) $$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0, \qquad t' = 0$$

entspricht im 1. Raume die in der Fluchtebene liegende imaginäre Ellipse [1]):

$$(41.)\quad \begin{aligned}(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14})^2 + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24})^2 \\ + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34})^2 = 0,\end{aligned}$$

$$(42.)\quad a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} = 0.$$

Die Gleichung (41.) aber gibt, entwickelt mit den Konstanten (34.):

$$(43.)\quad \begin{aligned}b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{23}yz + 2b_{31}zx + 2b_{12}xy \\ + 2b_{14}x + 2b_{24}y + 2b_{34}z + b_{44} = 0.\end{aligned}$$

Für die *Schnittkurve der Fläche* (43.) *mit der Ebene* (42.) bestimmen gerade die Gleichungen (26.) und (25.) die *Hauptachsenkoeffizienten* und *Hauptachsenrichtungen* [2]).

Dies ist also die veränderte Gestalt, die der allgemeine Satz § 2, (37.)—(39.) *bei Benutzung gewöhnlicher Koordinaten annimmt.*

In der Tat entspricht bei der kanonischen Form (30.) dem Kugelkreise:

$$(44.)\quad \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 0,\ \tau' = 0$$

der Kegelschnitt:

$$(45.)\quad \lambda_1^2\xi^2 + \lambda_2^2\eta^2 + \frac{A^2}{A_0^2} = 0,\ \zeta = 0.$$

Dem Kugelkreis des **1. Raumes:**

$$(46.)\quad x^2 + y^2 + z^2 = 0,\ t = 0$$

entspricht nach (2.) der Kegelschnitt:

$$(47.)\quad \begin{aligned}(A_{11}x' + A_{21}y' + A_{31}z' + A_{41})^2 + (A_{12}x' + A_{22}y' + A_{32}z' + A_{42})^2 \\ + (A_{13}x' + A_{23}y' + A_{33}z' + A_{43})^2 = 0\end{aligned}$$

$$(48.)\quad A_{14}x' + A_{24}y' + A_{34}z' + A_{44} = 0.$$

Die Gleichung (47.) lautet mit den Koeffizienten (35.):

$$(49.)\quad \begin{aligned}B'_{11}x'^2 + B'_{22}y'^2 + B'_{33}z'^2 + 2B'_{23}y'z' + 2B'_{31}z'x' + 2B'_{12}x'y' \\ + 2B'_{14}x' + 2B'_{24}y' + 2B'_{34}z' + B'_{44} = 0.\end{aligned}$$

Die Gleichungen (36.) und (37.) bestimmen aber für die Schnittkurve der Fläche (49.) mit der Ebene (48.) die Hauptachsenkoeffizienten und Hauptachsenrichtungen. In der Tat entspricht mit Bezug auf die neuen Koordinatensysteme nach (39.) dem Kugelkreise:

$$(50.)\quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0,\ \tau = 0$$

der Kegelschnitt:

$$(51.)\quad \frac{A^2\xi'^2}{\lambda_1^2} + \frac{A^2\eta'^2}{\lambda_2^2} + \frac{A^2}{a_0^2} = 0,\ \zeta' = 0.$$

11. *Doppelwurzel der quadratischen Gleichung.* Wenn wir als Bedingungen der Gleichheit der beiden Wurzeln λ_1^2 und λ_2^2 der Gleichung (26.), die sich *mit den Bedingungen der Kreisschnitte einer Fläche 2. Ordnung decken*, das Verschwinden der 6 Unterdeterminanten:

---

[1]) K. Koll. S. 22, (64).

[2]) St. II, § 108, (27); (26).

$$(52.) \qquad \begin{aligned} B_{11}(\lambda^2) = 0,\ B_{22}(\lambda^2) = 0,\ B_{33}(\lambda^2) = 0, \\ B_{23}(\lambda^2) = 0,\ B_{31}(\lambda^2) = 0,\ B_{12}(\lambda^2) = 0 \end{aligned}$$

bezeichnen, so sind das „*überzählige*" Bedingungen [1]), aus denen drei unabhängige ausgewählt werden können, die dann unter Elimination von λ^2 die zwei Bedingungen der Kreisschnitte in ihren verschiedenen Formen liefern [2]).

Die beiden Achsen ξ, η sind im Falle einer Doppelwurzel $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$ durch (25.) *nicht mehr bestimmt*, sondern bilden zwei beliebige rechtwinklige Achsen, die zur ζ-Achse senkrecht stehen [3]).

Wegen der Folgen einer Doppelwurzel für die Kollineation verweisen wir auf *Kommerell* [4]).

---

[1]) St. II § 109, (24).

[2]) Ausführliches hierüber Archiv f. Math. u. Phys. (3) VII, S. 188.

[3]) St. II § 110, 4.

[4]) K. Koll. S. 24.

Eine stetige nicht differenzierbare Funktion im Gebiete der *Hensel*schen Zahlen.

Von Herrn *K. Rychlik* in Prag.

Im Körper der *Hensel*schen p-adischen Zahlen (p eine rationale Primzahl) [1]) definieren wir eine Funktion $f(x)$ folgendermaßen: Jede p-adische Zahl x kann eindeutig durch eine reduzierte p-adische Entwickelung dargestellt werden $x = a_r p^r + a_{r+1} p^{r+1} + \cdots$, wo r eine ganze rationale Zahl bedeutet und die Koeffizienten a_n aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots p-1$ gewählt sind; für $x \neq 0$ kann r durch $a_r \neq 0$ festgelegt werden, für $x = 0$, wo alle $a_n = 0$ sind, wählen wir $r = 0$. Setzen wir $f(x) = a_s p^s + a_{s+2} p^{s+2} + a_{s+4} p^{s+4} + \cdots$, wo $s = r$ oder $r+1$ ist, je nachdem r ungerade oder gerade ist. $f(x)$ enthält also alle Glieder aus x, bei denen p mit einem ungeraden Exponenten vorkommt. Es ist $f(0) = 0$.

Von der eindeutigen Funktion $f(x)$ kann man beweisen, daß sie stetig ist für alle Werte von x. Aus $h \equiv 0 \pmod{p^n}$, $(n \geq r)$, d. h. $h = h_n p^n + h_{n+1} p^{n+1} + \cdots$, folgt sofort:

$$x = a_r p^r + \cdots + a_{n-1} p^{n-1} + a_n p^n + \cdots$$
$$x + h = a_r p^r + \cdots + a_{n-1} p^{n-1} + (a_n + h_n) p^n + \cdots,$$

sodaß $f(x+h) \equiv f(x) \pmod{p^n}$ ist; $f(x+h) - f(x)$ nähert sich gleichzeitig mit h dem Grenzwerte 0 im Körper der p-adischen Zahlen, und die Funktion $f(x)$ ist wirklich stetig.

Setzen wir weiter $\varepsilon_n = 1$ oder -1 je nachdem $a_n \neq p-1$ oder $= p-1$ ist $(n \geq r)$. Für $x + \varepsilon_n p^n = a_r p^r + \cdots + a_{n-1} p^{n-1} + (a_n + \varepsilon_n) p^n + a_{n+1} p^{n+1} + \cdots$ erhalten wir so eine reduzierte p-adische Entwickelung, und wir können leicht konstatieren, daß $f(x + \varepsilon_n p^n) = f(x)$ oder $f(x) + \varepsilon_n p^n$ ist, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Für die Folgen $h_n' = \varepsilon_{s+2n} p^{s+2n}$ und $h_n'' = \varepsilon_{s+2n+1} p^{s+2n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, welche zum Grenzwerte 0 im Körper der p-adischen Zahlen konvergieren, erhalten wir bzw. $\dfrac{f(x+h_n') - f(x)}{h_n'} = 1$ und $\dfrac{f(x+h_n'') - f(x)}{h_n''} = 0$, so daß der erste Ausdruck 1, der zweite 0 zum Limes für $n = \infty$ hat. Dadurch ist der Beweis, daß die Funktion $f(x)$ für keinen Wert x aus dem Körper der p-adischen Zahlen eine Derivierte besitzt, erbracht.

[1]) Im Körper $K(p)$ nach *Hensel*, Theorie d. alg. Zahlen I. (Teubner 1908) 2. Kap.

Durch ganz gleiches Verfahren kann man den Beweis auch für den Bereich der g-adischen Zahlen führen (g eine ganze rationale Zahl) und für die *Hensel*schen Zahlen, welche einem beliebigen algebraischen Zahlkörper von endlichem Grade zugeordnet sind.

Notiz.

Herr Prof. *Jašek* aus Pilsen hat im handschriftlichen Nachlasse von Bolzano, (welcher in der Nationalbibliothek in Wien aufbewahrt wird), das Beispiel einer Funktion gefunden, von der Bolzano behauptet (1834!), daß sie in einem geschlossenen Intervalle stetig ist und in einer überall dichten Menge dieses Intervalles keine endliche Derivierte besitzt. Ich bewies, daß diese Funktion in keinem Punkte jenes Intervalles eine endliche, ja sogar in keinem inneren Punkte eine bestimmt unendliche Derivierte besitzt. Herrn *Jašeks* und meine Arbeit sind in den Sitzungsberichten d. königl. böhm. Ges. d. Wiss., II. Kl., Prag erschienen:

M. Jašek, Aus dem handschriftlichen Nachlaß Bernard Bolzanos, 1920—21.
K. Rychlík, Über eine Funktion aus Bolzanos handschriftlichem Nachlasse. 1921—22.

Irreduzible Formen.

Von Herrn *Josef Kürschák* in Budapest[1]).

§ 1. Unter *Form* soll hier stets eine solche rationale ganze Funktion von z verstanden werden, deren Koeffizienten *rationale* Zahlen sind. Eine Form heißt *ganz*, wenn ihre Koeffizienten ganze rationale Zahlen sind.

Für die Irreduzibilität einer ganzen Form ist die folgende *hinreichende* Bedingung längst bekannt[2]):

In $H(z) = f^q(z) + p\,M(z)$ *bedeute* q *eine natürliche Zahl,* p *eine Primzahl; die ganze Form*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$$

sei modulo p *irreduzibel; die ganze Form* $M(z)$ *sei von einem niedrigeren Grad als* $f^q(z)$ *und* modulo p *nicht durch* $f(z)$ *teilbar. Dann ist* $H(z)$ *modulo* p^2 *(also auch im gewöhnlichen Sinne) irreduzibel.*

Diesen Satz nennen wir für $f(z) = z$ den *speziellen*, für ein beliebiges $f(z)$ den *allgemeinen Schönemannschen Satz.*

Unter den mannigfaltigen neueren Verallgemeinerungen des speziellen *Schönemann*schen Satzes geht der *Dumas*sche *Produktsatz*[3]) am weitesten, er enthält aber den allgemeinen *Schönemann*schen Satz nicht in sich. Auch vom allgemeinen *Schönemann*schen Satz gibt es weitere Verallgemeinerungen; sie stammen von den Herren *Bauer*[4]) und *Dumas*[5]).

Eine längere mündliche Besprechung dieses Gegenstandes mit Herrn *Bauer* (im Sommer 1919) führte mich zu der Frage, ob es nicht einen solchen Satz gibt, der sowohl den *Dumas*schen *Produktsatz* als auch den *Bauer-Dumas*schen *Satz* in sich schließt.

---

[1]) Vorgelegt der Ungarischen Akademie der Wissenschaften in Budapest am 10. Okt. 1919.

[2]) *Th Schönemann*, Von denjenigen Moduln, welche Potenzen von Primzahlen sind. Journ. für Math., Band 32 (1846), Seite 93—105. Im besonderen § 61, Seite 100—101.

Für den Fall $f(z) = z$ wiedergefunden von *G. Eisenstein*, Über die Irreduziblität und einige andere Eigenschaften der Gleichung, von welcher die Teilung der ganzen Lemniskate abhängt. [Erste Mitteilung.] Journ. für Math., Bd. 39 (1850), Seite 160—179. Im besonderen Seite 166—167.

[3]) *G. Dumas*, Sur quelques cas d'irréductibilité des polynomes à coefficients rationnels. Journ. de Math., Serie 6, Bd. 2 (1906), Seite 191—258. Im besonderen § 3., Nummer 3, Seite 214—217.

[4]) *M. Bauer*, Adalékok az irreducibilis egyenletek elméletéhez. Mathematikai és Physikai Lapok, Bd. 13 (1904), Seite 319—322. — Verallgemeinerung eines Satzes von Schönemann. Journ. für Math., Bd. 128 (1905), Seite 87—89.

[5]) *Dumas*, a. a. O., § 12, Nummer 2—9, Seite 251—258.

Im folgenden soll ein solcher Satz bewiesen werden. Um verständlicher zu sein, werde ich in meiner Darstellung von den Grundbegriffen ausgehen. Dies ist schon deshalb unvermeidlich, weil *Dumas* den Beweis seines Produktsatzes nur beiläufig angedeutet hat. Ich glaube seine Andeutungen ganz in seinem Geiste ergänzt zu haben [1]).

Die Ordnung einer Form.

§ 2. Unsere Untersuchungen werden sich stets *im Bereiche einer Primzahl* p bewegen, d. h. wir werden die rationalen Zahlen stets in Bezug auf eine Primzahl p betrachten.

Der Quotient von zwei solchen ganzen Zahlen, deren keine durch p teilbar ist, heißt eine *Einheit im Bereiche von* p. Z. B. $\frac{2}{15}$, $-\frac{1}{8}$, $7 = \frac{7}{1}$ sind im Bereiche von 13 Einheiten.

Jede von Null verschiedene rationale Zahl läßt sich (und zwar nur auf eine Weise) in der Gestalt $a = p^\alpha E$ darstellen, wo E eine Einheit im Bereiche von p und α einen ganzen Exponenten bedeutet. Dieser Exponent, der positiv, Null oder negativ sein kann, wird die Ordnung (oder Ordnungszahl) von a (in bezug auf p, modulo p oder im Bereiche von p) genannt. Auch der Zahl Null wird eine Ordnung beigelegt, und zwar $+\infty$.

§ 3. Jedem Gliede der Form

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

ordnen wir einen Punkt $\mathfrak{A}_i$ zu, dessen Lage in bezug auf ein *Descartes*sches Koordinatensystem, (das wir uns in der üblichen Lage vorstellen), durch die Koordinaten $x = i$, $y = \alpha_i$ bestimmt wird. Hier bedeutet α_i die Ordnung des Koeffizienten von z^i. (Gliedern mit dem Koeffizienten Null entsprechen keine Punkte.)

Ist die durch die Gleichung $\mu x + y = u$ bestimmte Gerade Δ_u^μ eine (untere) *Stützgerade* [2]) des Diagramms A (oder A_z), das auf die besagte Weise der Form $F(z)$ entspricht: so sagen wir „$F(z)$ *stützt sich auf* Δ_u^μ" und schreiben

$$F(z) \asymp \Delta_u^\mu.$$

Die Zahl u heißt (in bezug auf p) die *Ordnung von* $F(z)$ *in der Richtung* μ (d. h. in der durch die *Neigung* oder *Deklination* μ bestimmten Richtung).

Ist die Form $F(z)$ vom Grade Null, also identisch mit einer rationalen Zahl a, so ist ihre Ordnung in jeder Richtung gleich der Zahl α, die im vorhergehenden § als die Ordnung von a definiert wurde. $F(z) = z$ hat in der Richtung μ die Ordnung μ; $a_i z^i$ hat in der Richtung μ die Ordnung $\alpha_i + \mu i$. Die Ordnung von

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

---

[1]) Einen höchst einfachen und strengen Beweis, aber in ganz anderem Geiste, gibt: *M. Bauer*, Elemi irreducibilitási vizsgálatok. Mathematikai és Természettudományi Értesitő, Bd. 25 (1907), Seite 312—318. *M. Bauer*, Elementare Irreduzibilitätsuntersuchungen, Journ. für Math., Bd. 134 (1908), Seite 15—22.

[2]) Wir betrachten nur *untere* Stützgeraden, nennen also Δ_μ^u dann und nur dann eine *Stützgerade* eines Diagramms, wenn kein Punkt des Diagramms unterhalb Δ_μ^u und wenigstens einer auf dieser Geraden liegt.

ist gleich der kleinsten unter den Ordnungszahlen der einzelnen Glieder. Die Summe der Glieder kleinster Ordnung, also derjenigen Glieder, denen auf der Stützgerade Δ_μ^u liegende Punkte entsprechen, wird (in bezug auf p) der *Hauptteil von* $F(z)$ *in der Richtung* μ genannt und mit $F_0(z)$ bezeichnet.

Ist die in der Richtung μ genommene Ordnung von $F(z)$ positiv oder gleich Null, so wird $F(z)$ (in bezug auf p) *in dieser Richtung ganz* genannt.

Sprechen wir *ohne Angabe der Richtung* von der Ordnung der Form $F(z)$ in bezug auf p, so ist immer die *horizontale* Richtung vorausgesetzt. In Übereinstimmung hiermit bedeutet die Aussage, $F(z)$ sei in bezug auf p ganz, (ohne Angabe der Richtung): daß die Ordnungszahlen der Koeffizienten von $F(z)$ sämtlich positiv oder gleich Null sind.

§ 4. *Haben* $F(z)$ *und* $G(z)$ (in bezug auf p) *in der Richtung* μ *bzw. die Ordnungen* u *und* v, *wo* $u < v$ *ist: so hat die Summe* $F(z) + G(z)$ *in derselben Richtung die Ordnung* u.

Haben $F(z)$ *und* $G(z)$ *in der Richtung* μ *dieselbe Ordnung* u: *so ist in dieser Richtung die Ordnung von* $F(z) + G(z)$ *sicher* $\geqq u$.

§ 5. *Haben* $F(z)$ *und* $G(z)$ *in der Richtung* μ *bzw. die Ordnungen* u *und* v: *so hat ihr Produkt in derselben Richtung die Ordnung* $u + v$.

Für das Produkt zweier Monome az^i und bz^k ist dies unmittelbar evident. Ist aber

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \cdots,$$
$$G(z) = b_0 + b_1 z + \cdots,$$

so ist $F(z)\,G(z)$ die Summe solcher Teilprodukte $(a_r z^r)\,(b_s z^s)$ deren Ordnungen $\geqq u + v$ ist. Die Ordnung von $F(z)\,G(z)$ ist also sicher nicht kleiner als $u + v$.

Sie ist aber auch nicht größer als $u + v$. Denn haben unter denjenigen Gliedern von $F(z)$ und $G(z)$, deren Ordnung gleich u resp. v ist, $a_i z^i$ und $b_k z^k$ die kleinsten Grade: so ist in

$$F(z)\,G(z) = c_0 + c_1 z + \cdots$$

das Glied $c_{i+k} z^{i+k}$ die Summe solcher Teilprodukte, von denen $(a_i z^i)\,(b_k z^k)$ die Ordnung $u + v$ hat, die übrigen aber höhere Ordnungen haben. Das betrachtete Glied von $F(z)\,G(z)$ ist aber sicher von der Ordnung $u + v$.

Um von hieraus zu dem *Dumas*schen *Produktsatze* zu kommen, müssen wir einige geometrische Betrachtungen vorausschicken.

Addition von Diagrammen.

§ 6. Es bedeute A irgendein Diagramm, das aus einer endlichen Anzahl von Punkten besteht (und nicht unbedingt einer Form $F(z)$ entsprechen muß). Liegen die Punkte von A nicht sämtlich in einer vertikalen Geraden, so kann man aus ihrer Gesamtheit (auf nur eine Weise)

(1.) $$\mathfrak{A}_a, \mathfrak{A}_b, \mathfrak{A}_c, \ldots, \mathfrak{A}_k, \mathfrak{A}_l$$

so auswählen, daß

(2.) $$\overline{\mathfrak{A}_a \mathfrak{A}_b}, \overline{\mathfrak{A}_b \mathfrak{A}_c}, \ldots, \overline{\mathfrak{A}_k \mathfrak{A}_l}$$

die Seiten einer nach unten konvexen gebrochenen Linie sind, die das Diagramm

nach unten begrenzt. Diese gebrochene Linie, die auch aus einer einzigen Strecke bestehen kann, heißt die *Kontur* oder das (*Newton*sche) *Polygon* von A. Die Punkte (1.) heißen die *Eckpunkte*, die Strecken (2.) die *Begrenzungssehnen* von A.

Liegen sämtliche Punkte von A auf einer vertikalen Geraden, oder besteht das Diagramm gar nur aus einem Punkte, so beschränkt sich das Polygon auf einen einzigen Eckpunkt, nämlich auf den tiefsten, (möglichenfalls den einzigen) Punkt des Diagramms.

§ 7. An das Diagramm A kann in jeder horizontalen oder schiefen Richtung eine und nur eine Stützgerade gelegt werden. Sie enthält im allgemeinen nur einen Punkt von A, und zwar einen Eckpunkt. Es gibt aber auch solche Stützgeraden, auf denen mehrere Punkte von A liegen, es sind dies diejenigen Geraden, die eine Begrenzungssehne enthalten. Auf einer solchen Geraden sind der erste und der letzte auf ihr gelegene Punkt von A identisch mit den Endpunkten jener Begrenzungssehne.

Diejenigen Stützgeraden, deren Neigung $\geqq \mu_0$ *ist, bestimmen eindeutig denjenigen Teil der Kontur von A, dessen Neigung* $\geqq \mu_0$ *ist.*

Der Punkt P liegt nämlich dann und nur dann auf dem besagten Teil der Kontur, wenn durch P wenigstens eine solche Stützgerade gezogen werden kann, deren Neigung $\geqq \mu_0$ ist, aber durch keinen vertikal über P gelegenen Punkt eine solche Stützgerade geht.

Die Gesamtheit aller Stützgeraden von A bestimmt eindeutig die ganze Kontur.

§ 8. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}_i = (x_i, y_i)$ und $\mathfrak{B}_k = (\xi_k, \eta_k)$ beliebige Punkte zweier Diagramme A und B. Ferner sei

$$\mathfrak{C}_{ik} = (x_i + \xi_k,\ y_i + \eta_k).$$

Die Gesamtheit der Punkte $\mathfrak{C}_{ik}$ (in der wir zusammenfallende Punkte nur einmal zählen) bildet ein Diagramm, das man mit $A + B$ bezeichnet und die Summe von A und B nennt.

Sind Δ_μ^u *und* Δ_μ^v *die in der Richtung* μ *bzw. an A und B gelegten Stützgeraden, so hat* $A + B$ *in dieser Richtung* Δ_μ^{u+v} *zur Stützgeraden.*

Es sind nämlich u und v die Minima der $\mu x_i + y_i$ bzw. $\mu \xi_k + \eta_k$. In der Gleichung

$$\mu x + y = w$$

der an $A + B$ gelegten Stützgeraden ist w das Minimum der Zahlen von der Gestalt

$$\mu\,(x_i + \xi_k) + y_i + \eta_k.$$

Es ist also wirklich

$$w = u + v.$$

§ 9. *Sind auf den in der Richtung* μ *an A und an B gelegten Stützgeraden* $\mathfrak{A}_i$ *und* $\mathfrak{B}_k$ *die ersten,* $\mathfrak{A}_f$ *und* B_l *die letzten Punkte, die A bzw. B angehören: so ist auf der in derselben Richtung an A B gelegten Stützgerade* $\mathfrak{C}_{ik}$ *der erste und* $\mathfrak{C}_{fl}$ *der letzte Punkt von* $A + B$.

Soll nämlich $\mathfrak{C}_{gh}$ auf der Stützgerade Δ_μ^{u+v} von $A\,B$ liegen, so muß $\mathfrak{A}_g$ auf Δ_μ^u und $\mathfrak{B}_h$ auf Δ_μ^v liegen. In jedem anderen Falle würde $\mathfrak{C}_{gh}$ oberhalb Δ_μ^{u+v} liegen.

Soll ferner die Abszisse von $\mathfrak{C}_{gh}$ möglichst klein oder möglichst groß ausfallen, so müssen $\mathfrak{A}_g$ und $\mathfrak{B}_h$ möglichst kleine bzw. möglichst große Abszissen haben.

Der *Dumas*sche Produktsatz.

§ 10. Aus den §§ 5, 7 und 8 erhellt die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Dem Diagramme von $F(z)\,G(z)$ gehört dasselbe Polygon an, wie der Summe der Diagramme von $F(z)$ und von $G(z)$.

Dies ist, knapp gefaßt, der Inhalt des *Dumas*schen *Produktsatzes*.

§ 11. Wir erhalten die ausführlichere Fassung, in welcher *Dumas* den Satz ausgesprochen hat, wenn wir auch noch den §9 benützen. Der Satz lautet dann so:

Sind in den Diagrammen von $F(z)$ und $G(z)$

$$(i, a_i),\ (k, \beta_k)$$

die ersten,

$$(j, \alpha_j),\ (l, \beta_l)$$

die letzten auf den Stützgeraden von der Richtung μ gelegenen Punkte: so ist im Diagramm von $F(z)\,G(z)$

$$(i + k,\ \alpha_i + \beta_k)$$

der erste und

$$(j + l,\ \alpha j + \beta_l)$$

der letzte auf der Stützgeraden von der Richtung μ gelegene Punkt.

Wir nennen die Neigungen der Sehnen, die das Diagramm einer Form von unten begrenzen, die *charakteristischen Neigungen* der Form, und zählen jede charakteristische Neigung mit einer Multiplizität, die der horizontalen Projektion der entsprechenden Begrenzungssehne gleich ist. Der wesentlichste Inhalt des *Dumas*schen Produktsatzes läßt sich dann so ausdrücken:

Die charakteristischen Neigungen des Produktes bestehen aus der Gesamtheit der charakteristischen Neigungen der Faktoren, und zwar auch in bezug auf Multiplizität.

§ 12. Hieraus ergibt sich der *spezielle Schönemann*sche *Satz* in der folgenden Weise.

Das Diagramm von

$$H(z) = z^q + p\,M(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{q-1} z^{q-1} + z^q,$$

wo $c_0, \ldots, c_{q-1}$ durch p teilbar sind und c_0 durch p^2 nicht teilbar ist, besteht nur aus einer Begrenzungssehne mit den Endpunkten $(0, 1)$, $(q, 0)$ und der Neigung $\frac{1}{q}$.

Sollte $H(z)$ reduzibel sein, so gehörte zu jedem der Faktoren ein Diagramm mit nur einer Begrenzungssehne. Die vertikale Projektion dieser Begrenzungssehne hätte die Länge $\frac{k}{q}$, wo $0 < k < q$. Das ist aber unmöglich, weil im Diagramme, das einer Form entspricht, die vertikalen Projektionen der Begrenzungssehnen stets durch ganze Zahlen ausgedrückt werden. $H(z)$ kann demnach nicht reduzibel sein.

Addieren wir zu $H(z)$ eine ganze Form, deren Grad $< n$ ist und deren Koeffizienten durch p^2 teilbar sind, so wird die so erhaltene Form wieder irreduzibel sein. $H(z)$ ist also nicht nur im gewöhnlichen Sinne, sondern auch modulo p^2 irreduzibel.

Die Verallgemeinerung der modulo p irreduziblen Formen.

§ 13. Ist (im Bereiche von p) die in der Richtung μ genommene Ordnung von $F(z) - G(z)$ größer als u, so will ich das durch *die Äquipollenz*

$$F(z) \doteq G(z) \pmod{\Delta_\mu^u}$$

ausdrücken. So z. B. bedeutet die Äquipollenz

$$F(z) \doteq G(z) \pmod{\Delta_0^0}$$

dasselbe, wie die Kongruenz

$$F(z) \equiv G(z) \pmod{p},$$

(wenn der Kongruenzbegriff von *ganzen* Formen in üblicher Weise auch auf solche Formen übertragen wird, die nur *in Bezug auf* p ganz sind).

Haben die Formen niedrigsten Grades, mit denen $F(z)$ modulo Δ_μ^u äquipollent ist, den Grad n, so sagen wir, daß $F(z)$ (im Bereiche von p) *modulo* Δ_μ^u den Grad n hat.

§ 14. Es habe $H(z)$ sowohl im gewöhnlichen Sinne, wie auch modulo Δ_μ^u den Grad n. Gibt es eine Zerlegung

$$H(z) \doteq F(z)\,G(z) \pmod{\Delta_\mu^u}, \tag{1.}$$

in welcher die (im gewöhnlichen Sinne genommenen) Grade von $F(z)$ und $G(z)$ solche positive Zahlen sind, deren Summe gleich n ist: so sagen wir mit *Dumas*, daß $H(z)$ (im Bereiche von p) *modulo* Δ_μ^u *reduzibel* ist. Gibt es keine solche Zerlegung, so ist $H(z)$ *modulo* Δ_μ^u *irreduzibel* [1]).

Nach dieser Definition ist $H(z)$ im Falle $n = 1$ unbedingt irreduzibel. Im Falle $n = 0$ reden wir überhaupt nicht von Reduzibilität oder Irreduzibilität.

Im Falle $H(z) \asymp \Delta_\mu^u$ besagt die Äquipollenz (1.) dasselbe, wie die auf die *Hauptteile* (§ 3) bezügliche Äquipollenz

$$H_0(z) \doteq F_0(z)\,G_0(z) \pmod{\Delta_\mu^u}.$$

In diesem Falle kann also bei der Frage nach der Reduzibilität oder Irreduzibilität die Form $H(z)$ stets durch ihren Hauptteil ersetzt werden.

Diejenigen Formen, die sich auf die Abszissenachse stützen und in bezug auf diese irreduzibel sind, sind identisch mit denjenigen in bezug auf p ganzen Formen, die man gewöhnlich modulo p irreduzibel nennt. Ihre nächsten Verallgemeinerungen sind diejenigen Formen die (in Bezug auf p) in der Richtung μ ganz und modulo Δ_μ^0 irreduzibel sind. Mit ihrer Bestimmung wollen wir uns in den nächsten §§ beschäftigen.

§ 15. Wenn

$$H(z) \asymp \Delta_\mu^0$$

und dabei μ eine irrationale Zahl bedeutet, so ist $H_0(z)$ eine Konstante (und $H(z) = H_0(z)$); denn die Gleichung $a_i + \mu i = 0$ hat nur die eine ganzzahlige Lösung $i = \alpha_i = 0$. In diesem Falle kann also von Reduzibilität oder Irreduzibilität gar nicht gesprochen werden.

---

[1]) Wir haben keinen Grund, die Reduzibilität und Irreduzibilität auch für solche $H(z)$ zu definieren, die modulo Δ_μ^u einen niedrigeren Grad haben als im gewöhnlichen Sinn.

In unseren Betrachtungen wird also $\mu = \frac{r}{s}$ sein, wo r und s teilerfremde ganze Zahlen bedeuten. Den Nenner s wollen wir für positiv annehmen. (Im Falle $\mu = 0$ ist $r = 0$, $s = 1$.) $H(z)$ können und wollen wir stets durch $H_0(z)$ ersetzen.

$H_0(z)$ hat nur solche Glieder, in denen der Exponent von z durch s teilbar ist und die (in Bezug auf p) in der Richtung $\mu = \frac{r}{s}$ die Ordnung Null haben. Es ist also

$$H_0(z) = e_0 + e_1 p^{-r} z^s + e_2 p^{-2r} z^{2s} + \cdots = \Phi(p^{-r} z^s),$$

wo jeder Koeffizient von

$$\Phi(z) = e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + \cdots$$

Null oder aber eine Einheit im Bereiche von p ist.

Wäre hier $\Phi(z)$ modulo p reduzibel, also

$$\Phi(z) = \varphi(z)\,\psi(z) + M(z),$$

wo die Ordnungen von $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ gleich Null sind, und die Ordnung von $M(z)$ positiv ist, so hätten wir die Zerlegung

$$H_0(z) = \Phi(p^{-r} z^s) \doteq \varphi(p^{-r} z^s)\,\psi(p^{-r} z^s) \pmod{\Delta_\mu^0}.$$

Die in der Richtung $\mu = \frac{r}{s}$ *ganze Form* $H(z)$ *kann also nur dann modulo* Δ_μ^0 *irreduzibel sein, wenn ihr Hauptteil die Gestalt*

$$H_0(z) = \Phi(p^{-r} z^s)$$

hat, wo $\Phi(z)$ *in bezug auf* p *ganz und modulo* p *irreduzibel ist.*

§ 16. Bei der Frage, ob ein $H_0(z)$ von der besagten Gestalt auch wirklich modulo Δ_μ^0 irreduzibel ist, muß der Fall, daß $H_0(z)$ kein konstantes Glied enthält, für sich betrachtet werden. In diesem Falle kann die Form $H_0(z)$ nur so irreduzibel sein, wenn sie bis auf einen konstanten Faktoren gleich z ist. (Dies tritt nur für $s = 1$, $H_0(z) = E p^{-r} z$ ein.)

Ist hingegen das absolute Glied von

$$H_0(z) = \Phi(p^{-r} z^s)$$

eine Einheit im Bereiche von p, *so ist* $H_0(z)$ *modulo* $\Delta_\mu^0 \left(\mu = \frac{r}{s}\right)$ irreduzibel.

Um dies beweisen zu können, müssen wir vorerst einen wichtigen Satz über die Teilbarkeit der Formen vorausschicken.

§ 17. Die Form $A(z)$ heißt (im Bereiche von p) *modulo* Δ_μ^u *durch* $F(z)$ *teilbar*, wenn es eine solche Form $G(z)$ gibt, daß

$$A(z) \doteq F(z)\,G(z) \pmod{\Delta_\mu^u}$$

ist.

Es sei nun $\mu = \frac{r}{s}$, $u = 0$ und

$$H_0(z) = \Phi(p^{-r} z^s),$$

wo $\Phi(z)$ in bezug auf p ganz und modulo p irreduzibel ist, ferner das konstante Glied von $\Phi(z)$ eine Einheit im Bereiche von p ist.

Unter diesen Voraussetzungen ist das Produkt zweier (im Bereiche von p*) in der Richtung* μ *ganzer Formen,* $A(z)$ und $B(z)$, *dann und nur dann modulo* Δ_μ^0 *durch*

$H_0(z)$ teilbar, wenn wenigstens der eine Faktor diese Eigenschaft hat.

Es sei nämlich

$$A(z)\,B(z) \doteq H_0(z)\,G(z) \pmod{\Delta_\mu^0}. \tag{1.}$$

Wir dürfen voraussetzen, daß $A(z)$, $B(z)$ und $G(z)$ in der Richtung μ die Ordnung Null haben, da für jeden anderen Fall der Satz selbstverständlich ist.

Statt (1.) dürfen wir auch

$$A_0(z)\,B_0(z) \doteq H_0(z)\,G_0(z) \pmod{\Delta_\mu^0} \tag{2.}$$

schreiben. Hier ist

$$A_0(z) = U(p^{-r}z^s),\ B_0(z) = V(p^{-r}z^s),\ G_0(z) = W(p^{-r}z^s),$$

wo $U(z)$, $V(z)$, $W(z)$ in bezug auf p ganze Formen bedeuten.

Schreiben wir statt $p^{-r}z^s$ einfach z, so geht (2.) in

$$U(z)\,V(z) \equiv \Phi(z)\,W(z) \pmod{p} \tag{3.}$$

über. Es ist also $U(z)$ oder $V(z)$ modulo p durch $\Phi(z)$ teilbar.

Ist nun z. B.

$$U(z) \equiv \Phi(z)\,\psi(z) \pmod{p},$$

so folgt hieraus

$$A(z) \doteq U(p^{-r}z^s) \doteq H_0(z)\,\psi(p^{-r}z^s) \pmod{\Delta_\mu^0}.$$

Es ist also in der Tat $A(z)$ durch $H_0(z)$ teilbar.

§ 18. Mit Hilfe des soeben bewiesenen Satzes können wir nun die in § 16 ausgesprochene Irreduzibilität von $H_0(z)$ beweisen.

Wäre nämlich $H_0(z)$ reduzibel, so hätten wir eine Äquipollenz von der Gestalt

$$H_0(z) \doteq A(z)\,B(z) \pmod{\Delta_\mu^0}$$

wo $A(z)$ und $B(z)$ von einem niedrigeren Grade wären als $H_0(z)$. Es wäre also weder $A(z)$ noch $B(z)$ modulo Δ_μ^0 durch $H_0(z)$ teilbar. Das ist aber unmöglich, weil ihr Produkt modulo Δ_μ^0 durch $H_0(z)$ teilbar ist.

Das Gewicht einer Form.

§ 19. Ist eine Form $f(z)$ vorgelegt, die z wirklich enthält, so kann jede Form $F(z)$ (und zwar nur auf eine Weise) in der Gestalt

$$F(z) = A_0(z) + \cdots + A_i(z)\,f^i(z) + \cdots + A_q(z)\,f^q(z)$$

dargestellt werden, wo die $A(z)$ Formen niedrigeren Grades als $f(z)$ sind.

Im folgenden soll die Form $f(z)$ (im Bereiche von p) in der Richtung $\mu = \frac{r}{s}$ ganz sein, ihr Grad sei im gewöhnlichen Sinne und auch modulo Δ_μ^0 gleich n, endlich sei sie modulo Δ_μ^0 irreduzibel.

Die Ordnung die $A_i(z)$ (in bezug auf p) in der Richtung $\mu = \frac{r}{s}$ hat, bezeichnen wir mit a_i.

Jedem Gliede $A_i(z)\,f^i(z)$ wollen wir in einem *Descartes*schen Koordinatensysteme den Punkt (i, a_i) zuordnen. Das so erzeugte Diagramm nennen wir das $F(z)$ angehörige A_f, (zur Unterscheidung vom bisher benutzten Diagramm A oder A_z).

Hat die in der Richtung v an A_f gelegte Stützgerade die Gleichung

$$\nu x + y = u,$$

so sagen wir $F(z)$ hat in der Richtung ν (in bezug auf $f(z)$) das *Gewicht u.*

Was wir in § 4 über die Ordnung einer Summe gesagt haben, gilt auch in bezug auf ihr Gewicht.

Setzen wir $\nu > 0$ voraus, so läßt sich auch der Satz des § 5 von der Ordnung eines Produktes auf dessen Gewicht übertragen. Dazu müssen wir aber vorerst einige Hilfssätze vorausschicken. In diesen Hilfssätzen und in allen weiteren Betrachtungen sollen $f(z)$ und $\mu = \frac{r}{s}$ dieselbe Bedeutung haben wie in diesem Paragraphen.

§ 20. *Wenn*

$$A(z) \asymp \Delta_\mu^u \text{ und } B(z) \asymp \Delta_\mu^v,$$

so kann $A(z)\,B(z)$ (im Bereiche von p) modulo Δ_μ^{u+v} nur so durch $f(z)$ teilbar sein, wenn entweder $A(z)$ modulo Δ_μ^u oder $B(z)$ modulo Δ_μ^v durch $f(z)$ teilbar ist.

Wenn $f_0(z)$ bis auf einen konstanten Faktor gleich z ist, erhellt dies unmittelbar. Wir müssen also nur den Fall

$$f_0(z) = \Phi(p^{-r} z^s)$$

betrachten, wo $\Phi(z)$ eine solche in bezug auf p ganze und modulo p irreduzible Form ist, deren konstantes Glied eine Einheit im Bereiche von p ist.

Es sei nun

(1.) $$A(z)\,B(z) \doteq f(z)\,Q(z) \pmod{\Delta_\mu^{u+v}},$$

also

(2.) $$A_0(z)\,B_0(z) \doteq f_0(z)\,Q_0(z) \pmod{\Delta_\mu^{u+v}}.$$

Werden überall die Glieder niedrigster Ordnung herausgehoben, so kann diese Äquipollenz auch so geschrieben werden

(3.) $$p^\alpha z^\varrho \bar{A}_0(z) \cdot p^\beta z^\sigma \bar{B}_0(z) \doteq f_0(z) \cdot p^\gamma z^\tau \bar{Q}_0(z) \pmod{\Delta_\mu^{u+v}},$$

wo

$$\alpha + \varrho\mu = u, \quad \beta + \sigma\mu = v, \quad \gamma + \tau\mu = u + v$$

ist und jedes Glied von $\bar{A}_0(z)$, $\bar{B}_0(z)$, $\bar{Q}_0(z)$ in der Richtung μ die Ordnung Null hat. Diese Äquipollenz kann nur so bestehen, wenn

$$\varrho + \sigma = \tau, \quad \alpha + \beta = \gamma$$

und

(4.) $$\bar{A}_0(z)\,\bar{B}_0(z) \doteq f_0(z)\,\bar{Q}_0(z) \pmod{\Delta_\mu^0}.$$

Daraus folgt aber nach § 16 entweder für $\bar{A}_0(z)$ oder für $\bar{B}_0(z)$ die Teilbarkeit modulo Δ_μ^0 durch $f_0(z)$, also entweder für $A_0(z) = p^\alpha z^\varrho \bar{A}_0(z)$ in bezug auf Δ_μ^u, oder für $B_0(z) = p^\beta z^\sigma \bar{B}_0(z)$ in bezug auf Δ_μ^v die Teilbarkeit durch $f(z)$.

§ 21. Jede Form $H(z)$ läßt sich (und zwar nur auf eine Weise) in der Gestalt

(1.) $$H(z) = Q(z)\,f(z) + R(z)$$

ausdrücken, wo der Grad von $R(z)$ kleiner als n ist.

Hat $H(z)$ in der Richtung μ die Ordnung u, so können die Ordnungen von $Q(z)$ und $R(z)$ nicht $< u$ sein.

Wäre nämlich die Ordnung von $Q(z)$ kleiner als u, und wäre in $Q_0(z)$ das Glied niedrigsten Grades $c_\lambda z^\lambda$, so hätte auf der rechten Seite von (1.) das Glied,

,welches die $(\lambda + n)$-te Potenz von z enthält, eine solche Ordnung, die $< u$ ist. Das widerspricht aber der Annahme, daß $H(z)$ die Ordnung u hat.

Da die Ordnung von $H(z)$ gleich u und diejenige von $Q(z)$ nicht $< u$ ist, so ist auch die Ordnung von

$$R(z) = H(z) - Q(z)\, f(z)$$

nicht $< u$.

§ 22. Wir haben nun alles in der Hand zum Beweise des folgenden Satzes über das (auf $f(x)$ bezügliche) Gewicht eines Produktes:

Ist $\nu > 0$, so ist in dieser Richtung das Gewicht von $F(z)\, G(z)$ gleich der Summe der Gewichte der Faktoren.

Sind die Faktoren solche Formen $A(z)$, $B(z)$, deren Grade $< n$ sind: so ist deren Gewicht gleich ihrer in der Richtung μ genommenen Ordnungen u und v.

In

$$A(z)\, B(z) = R(z) + Q(z)\, f(z) \tag{1.}$$

ist nach § 21 die Ordnung von $Q(z)$ sicher nicht kleiner als $u + v$; diejenige von $R(z)$ ist nach § 20 gleich $u + v$. Auf der rechten Seite von (1.) hat also $R(z)$ das Gewicht $u + v$, und $Q(z)\, f(z)$ ein solches Gewicht, das sicher $> u + v$ ist. Das Gewicht von $A(z)\, B(z)$ ist also wirklich $= u + v$.

Daraus folgt unmittelbar, daß der Satz auch für das Produkt der Monome $A_i(z)\, f^i(z)$, $B_k(z)\, f^k(z)$ richtig ist.

Es sei nun

$$F(z) = A_0(z) + A_1(z)\, f(z) + \cdots,$$
$$G(z) = B_0(z) + B_1(z)\, f(z) + \cdots;$$

in der Richtung ν habe $F(z)$ das Gewicht u, $G(z)$ das Gewicht v.

$F(z)\, G(z)$ ist die Summe solcher Teilprodukte, deren Gewichte $\geqq u + v$ sind. Das Gewicht von $F(z)\, G(z)$ kann also nicht $< u + v$ sein.

Ferner hat in $F(z)\, G(z)$ wenigstens ein Glied das Gewicht $u + v$. Es seien nämlich in $F(z)$ und $G(z)$

$$A_i(z)\, f^i(z) \quad \text{und} \quad B_k(z)\, f^k(z)$$

die ersten Glieder, deren Gewicht nicht größer ist als u resp. v. Zum $(i + k)$-ten Gliede von $F(z)\, G(z)$ liefern nur diejenigen Teilprodukte

$$(A_\varrho(z)\, f^\varrho(z))\,(B_\sigma(z)\, f^\sigma(z)) = R_{\varrho\sigma}(z)\, f^{\varrho+\sigma}(z) + Q_{\varrho\sigma}(z)\, f^{\varrho+\sigma+1}(z)$$

Beiträge, in denen $\varrho + \sigma$ gleich $i + k$ oder $i + k - 1$ ist. Unter diesen Beiträgen hat nur $R_{ik}(z)\, f^{i+k}(z)$ das Gewicht $u + v$, alle anderen haben größere Gewichte. Das besagte Glied von $F(z)\, G(z)$ hat also wirklich das Gewicht $u + v$.

Der allgemeine Produktsatz.

§ 22. Die Diagramme, die den Formen $F(z)$, $G(z)$ und $F(z)\, G(z)$ in bezug auf $f(z)$ angehören, bezeichnen wir mit A_f, B_f, C_f.

Nach dem soeben bewiesenen Satze und nach § 8 sind die *positiv* geneigten Stützgeraden von C_f identisch mit denjenigen von $A_f + B_f$.

Ziehen wir auch noch § 7 in Betracht, so ergibt sich der folgende Satz:

Der absteigende Teil des Polygons, das zum Diagramme C_f von $F(z)\, G(z)$

gehört, ist identisch mit dem absteigenden Teil des Polygons, das zur Summe der Diagramme A_f und B_f von $F(z)$ und $G(z)$ gehört.

Wenn wir den Begriff der charakteristischen Richtungen auch auf die Diagramme A_f, B_f, C_f übertragen, so kann dieser *allgemeine Produktsatz* auch so ausgedrückt werden:

Die positiven charakteristischen Neigungen, die dem Produkte $F(z)\,G(z)$ (in Bezug auf $f(z)$) entsprechen, bestehen aus der Gesamtheit der positiven charakteristischen Neigungen der Faktoren, und zwar auch in Bezug auf Multiplizität.

Der *Bauer-Dumas*sche Satz.

§ 23. *In*

$$H(z) = g^q(z) + h(z)$$

mögen die in bezug auf p ganzen Formen $g(z)$, $h(z)$ die folgenden Bedingungen befriedigen:

a) *Es sei*

$$g(z) = b_0\,p^{\lambda r} + b_1\,p^{(\lambda-1)r}\,z^s + b_2\,p^{(\lambda-2)r}\,z^{2s} + \cdots + b_{\lambda-1}\,p^r\,z^{(\lambda-1)s} + z^{\lambda s}$$

wo die ganzen Zahlen r, s, λ die Ungleichheiten $r \geqq 0$, $s > 0$, $\lambda > 0$ befriedigen, r und s teilerfremd sind, und $b_0, b_1, \cdots, b_{\lambda-1}$ in bezug auf p ganze Zahlen bedeuten. Diese Form $g(z)$ sei modulo $\Delta_\mu^{\lambda r}$ irreduzibel, wo $\mu = \frac{r}{s}$ ist.

b) *Der Grad von $h(z)$ sei $< \lambda qs$. Diese Form habe in der Richtung μ die Ordnung $u = \lambda qr + \frac{\vartheta}{s}$, wo ϑ eine positive ganze Zahl bedeutet.*

c) *Die Form $h(z)$ sei modulo Δ_μ^u nicht durch $g(z)$ teilbar.*

d) *Die Zahlen q und ϑ seien teilerfremd.*

Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist $H(z)$ irreduzibel.

Dies ist für $\mu = 0$, $\vartheta = 1$ der allgemeine *Schönemann*sche Satz. Für $\mu = 0$, $\vartheta > 1$ stammt der Satz von *Bauer*, für $\mu = \frac{r}{s} > 0$ hat die Verallgemeinerung *Dumas* gefunden [1]).

Aus dem allgemeinen Produktsatz ergibt sich dieser Satz in der folgenden Weise. Die Form

$$f(z) = p^{-\lambda r}\,g(z)$$

ist so beschaffen, wie sie der allgemeine Produktsatz voraussetzt. Die Form

$$M(z) = p^{-\lambda qr}\,h(z)$$

hat in der Richtung μ die Ordnung $\frac{\vartheta}{s}$. Nach den Potenzen von $f(z)$ entwickelt ist

$$M(z) = U_0(z) + U_1(z)\,f(z) + \cdots + U_{q-1}(z)\,f^{q-1}(z),$$

wo $U_0(z)$ in der Richtung μ genau von der Ordnung $\frac{\vartheta}{s}$ ist, und die übrigen $U(z)$ (wie in § 21 die Form $Q(z)$) solche Ordnungen haben, die $\geqq \frac{\vartheta}{s}$ sind.

[1]) A. a. O. § 12 (Seite 249—258). Die dortige Beschränkung *e*) ist überflüssig.

Das Diagramm, welches der Form

$$p^{-\lambda qr} H(z) = f^q(z) + M(z)$$

in Bezug auf $f(z)$ entspricht, ist von unten durch eine einzige Begrenzungssehne begrenzt. Diese geht von $\mathfrak{A}_0 = \left(0, \frac{\vartheta}{s}\right)$ bis $\mathfrak{A}_q = (0, 0)$. Ihre horizontale Projektion hat die Länge q; ihre Neigung ist gleich $\frac{\vartheta}{sq}$.

Sollte $H(z)$ in zwei Faktoren zerfallen, so müßte jedem der Faktoren in bezug auf $f(z)$ ein solches Diagramm entsprechen, das wenigstens aus zwei Punkten besteht und (zufolge des allgemeinen Produktsatzes) nur eine Begrenzungssehne hat. Diese Begrenzungssehne hätte die Neigung $\frac{\vartheta}{s}$, und die Differenz der Ordinaten ihrer Endpunkte wäre $\frac{k\vartheta}{qs}$, wo k eine positive ganze Zahl bedeutet, die $< q$ ist.

Nun sind aber die Punkte der betrachteten Diagramme so definiert, daß ihre Ordinaten stets in der Richtung $\mu = \frac{r}{s}$ genommene Ordnungszahlen bedeuten. Es ist also jede solche Ordinate die Summe einer ganzen Zahl und eines Vielfachen von $\mu = \frac{r}{s}$; sie ist also ein Vielfaches von $\frac{1}{s}$.

Wäre $H(z)$ reduzibel, so müßte demnach $\frac{k\vartheta}{q}$ eine ganze Zahl sein. Das ist aber unmöglich, weil ϑ und q teilerfremd sind, ferner $0 < k < q$ ist.

Bemerkungen und Ergänzungen zum Beweis eines *Kummer*schen Theorems.

Von Herrn *Gustav Rados* in Budapest.

Im 30. Bande dieser Zeitschrift (S. 109) hat *Ernst Eduard Kummer* in seiner Abhandlung „Über die Divisoren gewisser Formen der Zahlen, welche aus der Theorie der Kreisteilung entstehen" einen Satz mitgeteilt, der später die Grundlage für den Aufbau einer der glänzendsten Leistungen auf dem Gebiete der Zahlentheorie geliefert hatte, nämlich die für die *Kummer*sche Theorie der dem Kreisteilungskörper angehörigen idealen Zahlen. Leider enthält der von *Kummer* erbrachte Beweis dieses schönen und folgenreichen Satzes eine Lücke, die sich auch in seiner später im 16. Bande des Journal de Mathématiques erschienenen großen Abhandlung „Mémoire sur la théorie des nombres complexes de racines de l'unité et de nombres entiers" vorfindet, in der *Kummer* (S. 377 a. a. O.) auf diesen Satz zurückkehrt. Auch *Paul Bachmann* beschränkt sich in seinem sonst so sorgfältig geschriebenen Buch „Die Lehre von der Kreisteilung und ihre Beziehungen zur Zahlen heorie" (Leipzig 1872) auf die unveränderte Wiedergabe des lückenhaften *Kummer*schen Beweises (s. S. 241).

Angesichts dieser Tatsachen dürfte es gerechtfertigt erscheinen, die einfachen Überlegungen mitzuteilen, durch die die erwähnte Lücke im *Kummer*schen Beweise ausgefüllt werden kann. Der größeren Verständlichkeit halber mögen die Erörterungen *Kummers* kurz wiederholt werden bis zu dem Punkte, wo die Ergänzung einsetzt.

Werden die Wurzeln der Kreisteilungsgleichung

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 = 0,$$

(p ist eine ungerade Primzahl)

zu e f-gliedrigen Perioden zusammengefaßt, wobei

$$ef = p - 1$$

ist, so befriedigen diese Perioden bekanntlich eine ganzzahlige algebraische Gleichung e-ten Grades. Ist x eine beliebige Wurzel der Kreisteilungsgleichung und g eine primitive Wurzel von p, so sind diese Perioden:

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= x + x^{g^e} + x^{g^{2e}} + \cdots + x^{g^{(f-1)e}} \\
\eta_1 &= x^g + x^{g^{e+1}} + x^{g^{2e+1}} + \cdots + x^{g^{(f-1)e+1}} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\eta_{e-1} &= x^{g^{e-1}} + x^{g^{2e-1}} + x^{g^{3e-1}} + \cdots + x^{g^{fe-1}}.
\end{aligned}$$

Ist nun

$$\varphi(y) \equiv (y-\eta_0)(y-\eta_1)\cdots(y-\eta_{e-1}) \equiv y^e + a_1 y^{e-1} + \cdots + a_{e-1} = 0$$

die erwähnte Periodengleichung, so sind die Koeffizienten

$$a_1, a_2, \ldots, a_{e-1}$$

in derselben ganze rationale Zahlen.

Kummers Satz lautet folgendermaßen:

I. „*Jede Primzahl, welche ein e-ter Potenzrest von p ist, ist ein Divisor der Form* $\varphi(y)$ *oder auch so: die Kongruenz* $\varphi(y) \equiv 0 \pmod q$ *hat, wenn der Modul q eine Primzahl und zugleich e-ter Potenzrest von p ist, immer e reelle Wurzeln, welche in besonderen Fällen auch zum Teil einander gleich werden können.*"

Kummer leitet zum Beweis dieses Lehrsatzes die Kongruenz

$$(K) \qquad \varphi(y)\,\varphi(y-1)\cdots\varphi(y-q+1) \equiv 0 \pmod{q^e}$$

her, die durch jeden ganzen rationalen Wert von y befriedigt wird, und schließt hieraus weiter in der folgenden Weise:

„Es müssen also immer e dieser Faktoren durch q teilbar sein, oder auch einige derselben den Faktor mehreremal enthalten, wenn $q \equiv g^r \pmod p$ und r durch e teilbar ist, das heißt, wenn q ein e-ter Potenzrest der Primzahl p ist. (In der Originalabhandlung steht infolge eines Druckfehlers hier q an der Stelle von p.) Hieraus erhält man folgenden Lehrsatz:" An dieser Stelle wird der Lehrsatz I ausgesprochen.

Nun folgt aus der Kongruenz (K) zweifellos der erste Teil des Lehrsatzes I, nämlich, daß jede Primzahl, die e-ter Potenzrest von p ist, ein Divisor der Form $\varphi(y)$ ist, d. h., daß die Kongruenz $\varphi(y) \equiv 0 \pmod q$ überhaupt lösbar ist. Nicht ohne weiteres folgt jedoch der zweite Teil dieses Satzes, daß die Anzahl der Wurzeln dieser Kongruenz genau gleich e ist. Denn in dem Falle, daß weniger als e Faktoren des Produktes

$$\varphi(y)\,\varphi(y-1)\cdots\varphi(y-q+1)$$

durch q teilbar sind, müssen einer oder einige dieser Faktoren q mehreremal enthalten. Allein daraus, daß $\varphi(y-k)$ durch q^α teilbar ist, folgt noch nicht, daß $x = y-k$ eine Wurzel der Kongruenz $\varphi(x) \equiv 0 \pmod q$ ist, deren Multiplizität α beträgt. Es kann daher aus (K) allein nicht unmittelbar auf die Existenz von e verschiedenen oder zum Teil gleichen Kongruenzwurzeln geschlossen werden. Hier zeigt sich die Lücke in *Kummers* Beweise, die nun im nachfolgenden ergänzt werden soll.

Der Ansatz hierzu ist derselbe wie bei *Kummer*, wo den Ausgangspunkt die identische Kongruenz

$$z(z-1)\cdots(z-q+1) \equiv z^q - z \pmod q$$

liefert. Setzt man hierin

$$z = y - \eta_k,$$

so ergibt sich die weitere identische Kongruenz:

$$(1) \quad (y-\eta_k)(y-\eta_k-1)\cdots(y-\eta_k-q+1) \equiv (y-\eta_k)^q - (y-\eta_k) \pmod q.$$

Der rechts stehende Ausdruck kann folgendermaßen umgestaltet werden:

$$(y-\eta_k)^q = y^q - \binom{q}{1} y^{q-1}\eta_k + \cdots + (-1)^{q-1}\binom{q}{q-1} y\eta_k^{q-1} + (-1)^q \eta_k^q$$
$$\equiv y^q + (-1)^q \eta_k^q \pmod q \text{ [1]},$$

da die Binominalkoeffizienten $\binom{q}{1}, \binom{q}{2}, \ldots \binom{q}{q-1}$ alle durch q teilbar sind. Aus demselben Grunde ist

$$\eta_k^q \equiv (x^{g^k} + x^{g^{e+k}} + \cdots + x^{g^{(f-1)e+k}})^q \equiv x^{qg^k} + x^{qg^{e+k}} + \cdots + x^{qg^{(f-1)e+k}} \pmod q,$$

und ist der Index von q in bezug auf die primitive Wurzel g von p gleich r, so daß

$$q \equiv g^r \pmod p$$

wird, so ist ferner

$$\eta_k^q \equiv x^{g^{k+r}} + x^{g^{e+k+r}} + \cdots + x^{g^{(f-1)e+k+r}} \equiv \eta_{k+r} \pmod q,$$

daher

$$(y-\eta_k)^q \equiv y^q + (-1)^q \eta_{k+r} \pmod q.$$

Dies in (1) eingesetzt führt zur identischen Kongruenz:

$$(y-\eta_k)(y-\eta_k-1)\cdots(y-\eta_k-q+1) \equiv y^q - y + \eta_k + (-1)^q \eta_{k+r} \pmod q.$$

Ist nun q ein e-ter Potenzrest von p und daher

$$q^{\frac{p-1}{e}} = q^f \equiv g^{fr} \equiv 1 \pmod p,$$

so muß fr durch $p-1 = ef$ und somit r durch e teilbar sein, so daß

$$\eta_{k+r} = \eta_k$$

wird.

Die identische Kongruenz (1) geht daher über in

$$(y-\eta_k)(y-\eta_k-1)\cdots(y-\eta_k-q+1) \equiv y^q - y + \eta_k + (-1)^q \eta_k \pmod q \text{ [1]}.$$

Es besteht daher sowohl für einen geraden, als auch für einen ungeraden Primzahl-Modul q die identische Kongruenz

$$(y-\eta_k)(y-\eta_k-1)\cdots(y-\eta_k-q+1) \equiv y^q - y \pmod q.$$

Setzt man nun

$$k = 0, 1, \ldots e-1$$

und multipliziert die sich ergebenden Kongruenzen, so hat man schließlich die identisch bestehende Kongruenz

$$(J) \qquad \varphi(y)\varphi(y-1)\cdots\varphi(y-q+1) \equiv (y^q - y)^e \pmod q,$$

an die die weiteren Schlußfolgerungen anknüpfen.

Aus dieser identischen Kongruenz folgt zunächst, indem man für y eine beliebige ganze rationale Zahl setzt, daß

$$\varphi(k)\varphi(k-1)\cdots\varphi(k-q+1) \equiv \varphi(0)\varphi(1)\cdots\varphi(q-1) \equiv (k^q - k)^e \equiv 0 \pmod q,$$

d. h. daß das Produkt

$$\varphi(0)\varphi(1)\cdots\varphi(q-1)$$

und somit auch wenigstens einer der Faktoren desselben, etwa $\varphi(a_1)$ durch die

---

[1]) Diese Formel weicht von der entsprechenden in der Abhandlung von *Kummer* darin ab, daß *Kummer* an Stelle von $(-1)^q \eta_k^q$ einfach $-\eta_k^q$ setzt, wodurch der Fall eines geraden Primzahl-Modul $q = 2$ ausgeschlossen wird, obschon der zu beweisende Satz auch für diesen Fall in Geltung bleibt.

Primzahl q teilbar ist, oder aber, daß $y \equiv \alpha_1 \pmod q$ Wurzel der Kongruenz

$$\varphi(y) \equiv 0 \pmod q$$

ist. Hieraus folgt das Bestehen der identischen Kongruenz

$$(K_1) \qquad \varphi(y) \equiv (y - \alpha_1)\, \varphi_1(y) \pmod q,$$

wo $\varphi_1(y)$ wiederum eine ganzzahlige Form von y bedeutet. Setzt man in (K_1) an die Stelle von y der Reihe nach

$$y - 1,\ y - 2, \ldots y - q + 1,$$

so ergeben sich die identischen Kongruenzen:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(y-1) &\equiv (y - \alpha_1 - 1)\, \varphi_1(y-1) \\ \varphi(y-2) &\equiv (y - \alpha_1 - 2)\, \varphi_1(y-2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi(y-q+1) &\equiv (y - \alpha_1 - q + 1)\, \varphi_1(y-q+1). \end{aligned}\right\} \pmod q$$

Werden diese Werte und aus (K_1) $\varphi(y)$ in (J) eingeführt, so hat man die identisch bestehende Kongruenz

$$\begin{aligned}(y - \alpha_1)(y - \alpha_1 - 1) \cdots (y - \alpha_1 - q + 1)\, \varphi_1(y)\, \varphi_1(y-1) \cdots \varphi_1(y-q+1) \\ \equiv (y^q - y)^e \pmod q.\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}(y - \alpha_1)(y - \alpha_1 - 1) \cdots (y - \alpha_1 - q + 1) &\equiv y(y-1) \cdots (y-q+1) \\ &\equiv y^q - y \pmod q,\end{aligned}$$

so daß sich schließlich die identische Kongruenz

$$(y^q - y)\,[\varphi_1(y)\, \varphi_1(y-1) \cdots \varphi_1(y-q+1) - (y^q - y)^{e-1}] \equiv 0 \pmod q$$

ergibt. Der erste Faktor links, $y^q - y$, ist mod q nicht identisch Null, also muß es der Klammerausdruck sein; es folgt hieraus die identische Kongruenz

$$(J_1) \quad \varphi_1(y)\, \varphi_1(y-1) \cdots \varphi_1(y-q+1) \equiv (y^q - y)^{e-1} \pmod q.$$

Aus dieser Kongruenz können durch dieselbe Schlußfolgerung die identischen Kongruenzen;

$$\left.\begin{aligned} (K_2) \qquad \varphi_1(y) &\equiv (y - \alpha_2)\, \varphi_2(y) \\ (J_2) \quad \varphi_2(y)\, \varphi_2(y-1) \cdots \varphi_2(y-q+1) &\equiv (y^q - y)^{e-2} \end{aligned}\right\} \pmod q$$

hergeleitet werden, wo $\varphi_2(y)$ wieder eine ganzzahlige Form von y vom $(e-2)$-ten Grade bedeutet. Wird dieses Verfahren $(e-1)$-mal wiederholt, ergeben sich die identischen Kongruenzen:

$$\left.\begin{aligned} (K_{e-1}) \qquad \varphi_{e-2}(y) &\equiv (y - \alpha_{e-1})\, \varphi_{e-1}(y) \\ (J_{e-1}) \quad \varphi_{e-1}(y)\, \varphi_{e-1}(y-1) \cdots \varphi_{e-1}(y-q+1) &\equiv y^q - y \end{aligned}\right\} \pmod q$$

und hieraus schließlich:

$$\left.\begin{aligned} (K_e) \qquad \varphi_{e-1}(y) &\equiv (y - \alpha_e)\, \varphi_e \\ (J_e) \qquad \varphi_e^q \equiv \varphi_e &\equiv (y^q - y)^0 \equiv 1 \end{aligned}\right\} \text{ mod } q,$$

wo φ_e eine ganzzahlige Form nullten Grades ist.

Die Zusammenfassung der identischen Kongruenzen $(K_1), (K_2), \ldots, (K_e)$ liefert die identische Kongruenz

$$\varphi(y) \equiv (y - \alpha_1)(y - \alpha_2) \cdots (y - \alpha_e) \pmod q,$$

durch die die Existenz von e verschiedenen oder auch eventuell gleichen Wurzeln

der Kongruenz

$$\varphi(y) \equiv 0 \pmod{q}$$

in Evidenz tritt.

Wie die obige Entwicklung zeigt, hat auch hier das von *Kronecker* mit großem Erfolg eingeführte methodische Hilfsmittel der Anwendung von Unbestimmten zum Ziel geführt, da in den obigen Ausführungen abweichend von *Kummers* Auffassung y nicht als Variable, sondern als unbestimmte Größe betrachtet wurde.

Eine Anwendung der *Kummer*schen Sätze.

In derselben Abhandlung hat *Kummer* auch den folgenden Lehrsatz bewiesen:

II. „*Die Form $\varphi(y)$ hat außer dem Divisor p im allgemeinen nur solche Primzahlen zu Divisoren, welche e-te Potenzreste von p sind; außerdem aber kann sie auch eine endliche bestimmte Anzahl anderer Divisoren haben, welche, wenn e die von Eins verschiedenen Divisoren $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ enthält, α-te oder β-te oder γ-te Potenzreste von p sein müssen.*“ (Dieses Journal Bd. 30, S. 111.)

Hieraus und aus dem Theorem I folgt nun, daß außer den e-ten Potenzresten von p, wo e Teiler von $p-1$ ist, es nur endlich viele Primzahlen q gibt, für die die Kongruenz

$$\varphi(y) \equiv 0 \pmod{q}$$

lösbar wird. Bezeichnet man die Anzahl der Kongruenzwurzeln dieser Kongruenz durch ν_q, so ist für jede Primzahl, die e-ter Potenzrest von p ist,

$$\nu_q = e,$$

für eine endliche Anzahl von Primzahlen ist

$$\nu_q \geqq 1,$$

für alle anderen ist

$$\nu_q = 0.$$

Nun besteht im Sinne eines von *Kronecker* herrührenden Satzes (Monatsberichte der königl. preuß. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1880, S. 155) die nachfolgende Gleichung:

$$\lim_{\varrho=0} \frac{\sum_{(q)} \frac{\nu_q}{q^{1+\varrho}}}{\log \frac{1}{\varrho}} = 1,$$

weil $\varphi(y)$ im natürlichen Rationalitätsbereich irreduzibel ist. Da der Beitrag derjenigen Primzahlen, die nicht e-te Potenzreste von p sind, zur Summe im Zähler nur endlich viele Glieder enthält, ergibt sich hieraus

$$\lim_{\varrho=0} \frac{\sum_{(q)} \frac{1}{q^{1+\varrho}}}{\log \frac{1}{\varrho}} = \frac{1}{e}$$

und man hat hiermit das folgende Theorem:

Ist e Teiler von $p-1$, so ist die Dichtigkeit derjenigen Primzahlen, die e-te Potenzreste von p sind, gleich $\frac{1}{e}$.

Da die Dichtigkeit aller Primzahlen gleich 1 ist, d. h. die Grenzgleichung

$$\lim_{\varrho=0} \frac{\sum_{(p)} \frac{1}{p^{1+\varrho}}}{\log \frac{1}{\varrho}} = 1$$

besteht, so folgt hieraus, daß die Dichtigkeit der e-ten Nichtreste gleich $\frac{e-1}{e}$ ist.

Es ist nun $e = 2$ stets Teiler von $p - 1$, so daß man noch den speziellen Fall der obigen Sätze hervorheben kann:

Die Dichtigkeit derjenigen Primzahlen, die quadratische Reste von p sind, stimmt überein mit der Dichtigkeit derjenigen Primzahlen, die quadratische Nichtreste von p sind.

Über die Lehre vom statistischen Ausgleich[1]).

Von Herrn *P. Riebesell* in Hamburg.

1. *Inhalt der Lehre.*

K. Marbe hat, zuerst im Jahre 1899[2]), im Anschluß an *d'Alembert* seine Lehre vom statistischen Ausgleich aufgestellt, nach der bei Versuchsreihen aus zwei entgegengesetzten Ereignissen reine Gruppen von hoher Wiederholungszahl des einen Ereignisses weniger häufig vorkommen sollen, als nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erwarten wäre. Beobachtungen am Roulettespiel, am Kopf-Wappenspiel mit einer Münze, am Geschlechtswechsel in den Geburtenregistern sollten zeigen, daß die nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung bestehende gleiche Häufigkeit für jede beliebige vorgeschriebene Aufeinanderfolge der Ereignisse in Wirklichkeit nicht eintritt, sondern daß reine Gruppen von hoher Ordnungszahl überhaupt nicht mehr vorkommen. Die Wahrscheinlichkeit der beiden Ereignisse soll hier als gleich angenommen werden.

2. *Marbes erste Methode.*

Um kein allzu großes Material untersuchen zu müssen, wandte *Marbe* in seiner ersten Arbeit das Verfahren an, daß er die n-Beobachtungen, die hier mit

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots n$$

bezeichnet werden mögen, in folgender Weise zu r-gliedrigen Gruppen zusammenfaßte:

$$(1, 2, 3, \ldots), (2, 3, 4, \ldots), (3, 4, 5, \ldots), \ldots .$$

Aus dieser Zahl wurden dann die reinen Gruppen gezählt. Der Fehler, der in dieser Methode der übereinandergreifenden Gruppen bei Benutzung der gewöhnlichen Formeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung liegt, ist seinerzeit von verschiedenen Autoren bemerkt worden. *V. Bortkiewicz* hat ihn durch folgende Sätze gekennzeichnet [3]):

---

[1]) Zusatz bei der Korrektur: Die Arbeit ist bereits im September 1916 in der vorliegenden Form der Schriftleitung übersandt worden, konnte jedoch wegen der schwierigen Druckverhältnisse erst jetzt zum Abdruck kommen. Inzwischen hat *L. v. Bortkiewicz* (Die Iterationen. Ein Beitrag zur Wahrscheinlichkeitstheorie. Berlin 1917) dem selben Gegenstand ein ausführliches Werk gewidmet, und *v. Mises* hat sich in mehreren Aufsätzen mit dem Problem beschäftigt (Die Naturwissenschaften, 7, 1919, S. 168 ff. Math. Ztschr. 5, 1919, S. 86 ff. Ztschr. f. ang. Math. u. Mech. 1, 1921, S. 298 ff.). Es ist natürlich, daß sich manche der in der vorliegenden Arbeit gebrachten Entwicklungen auch bei den andern Autoren finden. Es sind dort auch die allgemeinen Formeln abgeleitet. Der Verf.

[2]) *K. Marbe*, Naturphilosophische Untersuchungen zur Wahrscheinlichkeitslehre, Leipzig 1899.

[3]) *L. v. Bortkiewicz*, Ztschr. f. Philosophie u. philos. Kritik, Bd. 121, 1903.

1. Das Resultat irgendeines Einzelversuchs muß ohne Einfluß auf die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Resultats bei einem beliebigen andern Einzelversuch bleiben.

2. Es muß daher das Prinzip einer mehrmaligen Verwendung jedes Spielresultats bei der Bildung von Gruppen einer bestimmten Größenkategorie aufgegeben werden.

3. Die effektiven Zahlen der reinen Gruppen, die verschiedenen Gruppengrößen entsprechen, sind nicht aus einer gemeinsamen Versuchsreihe zu entnehmen, sondern es muß für jede Gruppengröße eine selbständige Unterlage in Gestalt einer besonderen Versuchsreihe geschaffen werden.

3. *Grünbaums Methode.*

Zur Vermeidung des Übergreifens der Gruppen hat *Grünbaum* [1]) das Prinzip der isolierten reinen Gruppen benutzt, und seine Methode ist auch in die Lehrbücher der Wahrscheinlichkeitsrechnung übergegangen [2]). *Grünbaum* verfährt folgendermaßen:

In einem Geburtenregister seien die männlichen (m) und weiblichen (f) Geburten eingetragen in der Reihenfolge:

$$f, m, f, f, f, m, m, f, \ldots$$

Dann werden die Gruppen in dieser Weise gebildet:

$$f; m; f, f, f; m, m; f; \ldots$$

Nun soll die Wahrscheinlichkeit für eine solche isolierte reine r-gliedrige Gruppe

$$(1.) \qquad w_r = \frac{1}{2^{r+1}}$$

sein, da sie sich aus r Ereignissen der einen und dem darauf folgenden Ereignis der andern Kategorie zusammensetzt.

Nach *Grünbaum* verhalten sich dann die nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorausberechneten Häufigkeiten der r-gliedrigen Gruppen g_r wie die Wahrscheinlichkeiten, sie bilden also die Reihe:

$$(2.) \qquad s_g = g_1 + \frac{1}{2} g_1 + \frac{1}{4} g_1 + \cdots$$

Außerdem gilt für die Zahl der Beobachtungen n die Gleichung:

$$(3.) \qquad n = 1 \cdot g_1 + 2 \cdot \frac{1}{2} g_1 + 3 \cdot \frac{1}{4} g_1 + \cdots.$$

Es wird also

$$s_g = 2\, g_1 \quad \text{und} \quad n = 4\, g_1.$$

Somit wird

$$g_1 = \frac{n}{4}, g_2 = \frac{n}{8}, \cdots$$

schließlich

$$(4.) \qquad g_r = \frac{n}{2^{r+1}}$$

und

[1]) *H. Grünbaum*, Isolierte und reine Gruppen und die *Marbe*sche Zahl p. Würzburg 1904.

[2]) Vgl. z. B. *E. Czuber*, Wahrscheinlichkeitsrechnung. 3. Aufl. Leipzig 1914.

(5.) $$s_g = \frac{n}{2}.$$

Zu dieser Methode ist zunächst zu bemerken, daß sie nur richtig ist, wenn $n = \infty$ ist. Nur dann liefern die Reihen (2.) und (3.) die angegebenen Werte. Dann sind aber auch die Werte g, s und r in Wirklichkeit unendlich groß. Ferner ist die Anwendung des *Bernoulli*schen Satzes, d. h. der Schluß von den Wahrscheinlichkeiten auf die Häufigkeiten, nur zulässig, wenn es sich um eine Anzahl gleichartiger Versuche handelt und um Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeitssumme 1 ist. Nur dann erhalte ich die Häufigkeiten, indem ich die Wahrscheinlichkeiten mit der Zahl der Versuche multipliziere. Der Vergleich von (1.) und (4.) zeigt, daß hier einfach immer mit der Zahl n, der Zahl der Einzelereignisse, multipliziert ist, während bei der Ableitung der Wahrscheinlichkeiten die Ereignisse zu je zweien, dreien usw. zusammengefaßt sind. Das Fehlerhafte dieser Methode, solange n nicht unendlich groß ist, folgt besonders aus den folgenden Methoden, die *Marbe* neuerdings anwendet.

4. *Marbes zweite Methode.*

In diesem Jahre hat *Marbe* [1]), auf ein umfangreiches Material von Geburtenziffern gestützt, auf Grund der *Grünbaum*schen Formeln abermals die Behauptung von dem Widerspruch zwischen Rechnung und Erfahrung aufgestellt. Ist M die Wahrscheinlichkeit einer männlichen Geburt, F die einer weiblichen, so ist nach *Marbe* die Wahrscheinlichkeit für eine reine Gruppe: zu 1, d. h. m, f oder f, m:

$$w_1 = M \cdot F + F \cdot M = M \cdot F\,(M^0 + F^0)$$

zu 2, d. h. m, m, f oder f, f, m:

$$w_2 = M^2 \cdot F + F^2 \cdot M = M \cdot F\,(M^1 + F^1)$$

. . . . . .

(6.) zu r: $$w_r = M \cdot F\,(M^{r-1} + F^{r-1}).$$

Für die Summe aller reinen Gruppen ergibt sich, ähnlich wie vorher:

(7.) $$s_g = \frac{n \cdot M \cdot F}{M^2 + F^2}$$

und für die Häufigkeiten der reinen Gruppen

(8.) $$g_r = (M^{r-1} + F^{r-1})\,\frac{n \cdot M^2 \cdot F^2}{M^2 + F^2}.$$

Für $M = F = \frac{1}{2}$ ergeben sich die Formeln:

(6a.) $$w_r = \frac{1}{2^r},$$

(7a.) $$s_g = \frac{n}{2},$$

(8a.) $$g_r = \frac{n}{2^{r+1}}.$$

Der Vergleich von (1.) und (6a.) zeigt, daß wir für die Wahrscheinlichkeiten doppelt

[1]) *K. Marbe*, Die Gleichförmigkeit in der Welt. München 1916.

so große Werte erhalten wie früher. Dadurch aber, daß jetzt mit dem Proportionalitätsfaktor $\frac{n}{2}$ multipliziert wird, bleiben die andern Werte ungeändert.

5. *Marbes dritte Methode.*

Kurz nach dem Erscheinen seines Buches hat *Marbe* auf Grund von Unterredungen mit seinen mathematischen Kollegen bereits selbst einige dieser Rechnungen richtiggestellt [1]). So muß bei den reinen Gruppen zu 1 usw. beachtet werden, daß, wenn sie keine Randgruppen sind, folgende Fälle möglich sind:

$$m, f, m \text{ und } f, m, f.$$

Ähnliches gilt für die höheren Gruppen. Man hat also nicht nur auf das folgende, sondern auch auf das vorhergehende Glied Rücksicht zu nehmen. Nach der zweiten Methode, bei der nur m, f und f, m unterschieden wurden, hätte man bei der Auszählung zu den eingliedrigen auch mehrgliedrige hinzurechnen müssen. Benutzt man aber die obigen Gruppen, so ergeben sich für die Wahrscheinlichkeiten die Werte:

$$w_1 = F^2 \cdot M + M^2 \cdot F,\ w_2 = F^2 \cdot M^2 + M^2 \cdot F^2, \ldots, w_r = F^2 \cdot M^r + M^2 \cdot F^r.$$

Für $M = F = \frac{1}{2}$ ist

$$w_r = \frac{1}{2^{r+1}}. \tag{9.}$$

Es ergibt sich also eine um die Hälfte kleinere Wahrscheinlichkeit, als bei der zweiten Methode (6 a.).

Um die Häufigkeit der Gruppen g zu erhalten, multipliziert *Marbe* mit der Zahl der Einzelfälle n und erhält dadurch, wenn wir von den Randgruppen absehen, wieder die Formel (8 a.).

Später (Bemerkungen S. 10, Formel IV) berechnet dann *Marbe* die Gesamtzahl s_g zu $\frac{n}{2}$, ohne aber diesen Wert für die obige Formel zu benutzen. Übrigens ist die dort gegebene Ableitung der Formel IV gänzlich verfehlt, sie sagt nur aus, daß unter n Gliedern $\frac{n}{2}$ Gruppen zu zwei Gliedern sind.

6. *Vergleich der Zählung mit der Rechnung.*

a) Die Rechnungen *Marbes.*

Will man Widersprüche zwischen Rechnung und Zählung konstatieren, so ist Voraussetzung, daß die auf beiden Wegen erhaltenen Zahlen nach gleichen und außerdem richtigen Grundsätzen abgeleitet werden. Wir wollen zunächst die *Rechnungen Marbes* zugrunde legen und dann fragen, ob die Zählungen nach denselben Grundsätzen durchgeführt sind. Die zweite Methode benutzt die eingliedrigen Gruppen in der Form m, f oder f, m. Die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Nach den Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung heißt das

---

[1]) *K. Marbe*, Mathematische Bemerkungen zu meinem Buch „Die Gleichförmigkeit in der Welt". München 1916.

nichts anderes, als daß unter den vier möglichen Gruppen zu zwei Gliedern die reinen Gruppen in der Zweizahl vertreten sind. Um die wahrscheinliche Anzahl aus einem vorgelegten Material zu erhalten, hat man dieses also in isolierte Zweiergruppen zu teilen $\left(\text{Anzahl } \frac{n}{2}\right)$, und man erhält als Anzahl der eingliedrigen Gruppen $\frac{n}{4}$. Die praktische Auszählung hat dann aber nach demselben Grundsatze zu geschehen. Für $r = 2$ wären Dreiergruppen zu bilden, und es ergäbe sich als Anzahl $\frac{n}{3} \cdot \frac{1}{4}$ usw. Außerdem ist der *Bortkiewicz*sche Satz 3 zu berücksichtigen. Dadurch, daß *Marbe* jede Wahrscheinlichkeit mit dem konstanten Proportionalitätsfaktor $\frac{n}{2}$ multipliziert, ergänzt er das Material auf diese Zahl, die unendlich groß ist, und zwar für jede Gruppengröße. Die Methode der Wahrscheinlichkeitsrechnung a posteriori, von der Häufigkeit auf die Wahrscheinlichkeit zu schließen, ist im vorliegenden Fall unzulässig, da die Versuchsreihe sich aus ganz ungleichartigen Elementen, den Gruppen verschiedener Größe, zusammensetzt. Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Gruppen sind nicht mit den Wahrscheinlichkeiten für das Ziehen von Kugeln (noch dazu von unendlicher Zahl) aus *einer* Urne, sondern aus *verschiedenen Urnen* zu vergleichen. Ist also die Ableitung der *Marbe*schen Formeln schon an sich nicht richtig, so geht außerdem die Zählung nach ganz andern Gesichtspunkten vor sich. Dadurch daß bei der Ableitung das folgende und vorhergehende Glied mit berücksichtigt wird, bei der Zählung aber nicht, sind die *Bortkiewicz*schen Sätze 1 und 2 verletzt. Wie aus der Benutzung der Zahl n bei der dritten Methode hervorgeht, müßte entweder das Material auf unendlich ergänzt oder die n übereinandergreifenden Gruppen benutzt werden. So ist es auch zu erklären, daß sowohl bei *Marbe*, wie auch bei *Grünbaum*, meist die Zählungen bei den Gruppen niedrigerer Ordnung größere Werte ergeben als die Rechnung, bei höherer Ordnung umgekehrt. Die Zählungen beziehen sich eigentlich auf ein viel größeres Material, das jedesmal auf dieselbe Zahl von Gruppen ergänzt wird. Die Wahrscheinlichkeit, daß hierbei neue Gruppen auftreten, ist aber bei den kleinen Gruppen bedeutend größer als bei den größeren. Für die dritte Methode *Marbes* gilt ganz Entsprechendes. Halten lassen sich dagegen die Formeln, wenn ich das Material als zyklische Reihe auffasse, d. h. das Ende an den Anfang anschließe. Diese Möglichkeit hat aber *Marbe* nicht erkannt [1]).

Es ist natürlich leicht möglich, andere Methoden anzugeben, nach denen eine rechnerisch richtige Untersuchung der Ereignisreihe in bezug auf die hier erörterte Frage möglich ist. Nur müssen die Zählungen dann nach demselben Prinzip ausgeführt werden. Auch die andere Auffassung *Marbes*, daß die aufeinanderfolgenden Gruppen als verschiedene Ereignisse mit verschiedener Wahrscheinlichkeit aufzufassen sind, sodaß das Problem mit dem Ziehen von verschiedenfarbigen Kugeln aus einer Urne zu vergleichen wäre, ist nicht stichhaltig, da ja die Reihenfolge der Gruppen nicht gleichgültig ist, und z. B. zwei dreigliedrige Gruppen desselben

[1]) Vgl. *H. Bruns*, Abhdlgn. math.-phys. Klasse der Kgl. sächs. Ges. d. W., Leipzig 1906.

Ereignisses als eine sechsgliedrige gezählt werden. Am einfachsten wäre es, zunächst eingliedrige Gruppen zu bilden, d. h. die *m* und *f* zu zählen. Dann werden die zweigliedrigen Gruppen gebildet und die Zahl der *m m* und *f f* festgestellt. (Häufigkeit $\frac{2}{2^2} \cdot \frac{n}{2}$. Für die *r*-gliedrigen ergibt sich entsprechend: $\frac{2}{2^r} \cdot \frac{n}{r}$).

b) Die Zählungen *Marbes.*

Legt man nun zweitens die *Marbe*schen *Zählungen* zugrunde und fragt, wie die Formeln lauten, mit denen sie verglichen werden müssen, so sieht man, daß diese Rechnungen mit der üblichen Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt nichts zu tun haben. Man muß das Verfahren, welches *Marbe* in seiner dritten Methode anwandte, gleichsam für den ganzen Komplex von 196 608 Gliedern seines Materials erweitern. Es handelt sich um die kombinatorische Aufgabe die $2^{196\,608}$ Variationen der beiden Elemente *m* und *f* hinzuschreiben und jedesmal die auftretenden reinen Gruppen zu zählen. Dann kann man wohl Zahlen für die mittlere Anzahl der einzelnen Gruppen finden, aber nicht für die Häufigkeit, die *Marbe* als die „*wahrscheinliche* Anzahl" bezeichnete. Das ganze *Marbe*sche Material bildet eben nur *eine* der $2^{196\,608}$ möglichen Anordnungen, und nur von *allen diesen* sagt die Wahrscheinlichkeitsrechnung, daß sie alle gleich wahrscheinlich sind. Will man dagegen das Material zerlegen, so muß man für jede Gruppenart eine andere Zerlegung und dementsprechende Zählung vornehmen. Die von *Marbe* angewandte Methode, nur die reinen Gruppen zu zählen, bedeutet für die Wahrscheinlichkeitsrechnung die Verknüpfung des ganzen Materials zu einem Versuch. Nur durch die Untersuchung des *Vielfachen* seines Materials und Feststellung der Tatsache, ob dann die durchschnittliche Anzahl der reinen Gruppen von der errechneten abweicht oder ob die Anordnungen mit hochgliedrigen Gruppen seltener vorkommen, hätte er also seine Behauptung beweisen können.

Die Verhältnisse mögen noch an einem Beispiel geklärt werden. Habe ich 4 Versuche, so sind folgende 2^4 Fälle möglich:

m m m m	*m f m m*	*f m m m*	*f f m m*
m m m f	*m f m f*	*f m m f*	*f f m f*
m m f m	*m f f m*	*f m f m*	*f f f m*
m m f f	*m f f f*	*f m f f*	*f f f f*

Jede von diesen Anordnungen ist gleich wahrscheinlich. Es finden sich unter ihnen reine Gruppen zu 1 : 24, zu 2 : 10, zu 3 : 4 und zu 4 : 2. Über die „wahrscheinliche Anzahl" in einem Versuch ist nichts auszusagen. Faßt man die Vierergruppen zu Achtergruppen zusammen, so ist jede mögliche von ihnen und somit jede daraus abzuleitende Gruppenverteilung wieder gleich wahrscheinlich. Die durchschnittliche Anzahl der verschiedenen Gruppen ist durch Abzählen festzustellen. Eine einfache Überlegung ergibt für die Durchschnittszahlen die Werte: $\frac{2}{2^r}, \frac{4}{2^r}, \frac{10}{2^r}, \frac{24}{2^r}, \frac{56}{2^r}, \frac{128}{2^r}$ usw., wobei sich die jeweiligen Zähler aus der Summe der vorhergehenden vermehrt um die aufeinanderfolgenden Potenzen von 2 ergeben. Teile ich also das Material in Vierer- oder Achtergruppen ein und vergleiche die Gruppenzahlen mit

der für ein *Vielfaches der* 2^n*-Komplexe* ermittelten Durchschnittszahlen, so ist dagegen nichts einzuwenden. Verknüpfe ich dagegen alle Beobachtungen zu *einer* Gruppe, so habe ich tatsächlich nur *einen* Versuch vor mir, aus dem ich nichts schließen kann. Die von *Marbe* in dieser Hinsicht herangezogene Untersuchung von $4 \cdot 2^{12}$ Zwölfergruppen beweist nichts, da das Vielfache zu klein ist und außerdem nur die Häufigkeit und nicht die Anordnung von *m* und *f* untersucht wird.

Der Hauptfehler der *Marbe*schen Deduktionen liegt also darin, daß Zählung und Rechnung nicht nach denselben Grundsätzen ausgeführt sind, daß außerdem bei der Ableitung nicht beachtet ist, daß bei einem Wahrscheinlichkeitsbruch Zähler und Nenner aus einer Gruppe von gleichartigen, gleichmöglichen Fällen gebildet sein müssen.

Da die *Marbe*schen Folgerungen irrig sind, fällt damit die Lehre vom statistischen Ausgleich und alles Weitere, das in seinem Buch über das Vorhandensein einer Gleichförmigkeit in der Welt aus dieser Lehre geschlossen wird [1]).

---

[1]) Zusatz bei der Korrektur. Inzwischen ist von biologischer Seite (*P. Kammerer*, Das Gesetz der Serie, Stuttgart 1919) die der *Marbe*schen entgegengesetzte Behauptung aufgestellt, daß wenigstens kurze Wiederholungsfolgen häufiger auftreten, als man durchschnittlich erwarten sollte. Eine andere Methode, die Ordnung in Zufallsreihen zu bestimmen, ist von *E. Schrödinger* (Phys. Ztschr. 1918, S. 218) gegeben. Es wird dort auch gezeigt, daß bei Geburtenreihen eine Geordnetheit nicht nachweisbar ist. Der Verf.

Über die Äquivalenz quadratischer Formen im Körper der rationalen Zahlen.

Von Herrn *Helmut Hasse* in Kiel.

Inhalt.

Seite

Einleitung 205
§ 1. Die Invarianten gegen p-adische Transformation 209
§ 2. Die vollständigen Invariantensysteme gegen p-adische und rationale Transformation. 217
§ 3. Die Komplexe rational äquivalenter Formen 218
§ 4. Die *Minkowski*schen Invarianten C_p 221

A. Einleitung.

In dieser sich an meine vorangehende [1]) anschließenden Arbeit will ich die entsprechende Frage für die Äquivalenz quadratischer Formen im Körper $K(1)$ der rationalen Zahlen vollständig beantworten, wie dort für die Darstellbarkeit in $K(1)$, d. h. die Frage:

(I.) *Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, daß zwei quadratische Formen mit rationalen Koeffizienten durch eine umkehrbare, lineare Substitution mit rationalen Koeffizienten zusammenhängen?*

Gewisse notwendige Bedingungen für die Äquivalenz in $K(1)$ habe ich schon in *H I* gefunden. Es stellte sich nämlich dort heraus, daß für die Darstellbarkeit in $K(1)$ einzig und allein gewisse Invarianten der Formen maßgebend sind (*H I*, Tabellen in § 14, S. 147), die ich eben deshalb *Invarianten* nannte, weil sie sich sämtlich (bis auf das dortige $\hat{c}_p(\varphi)$) als invariant gegen rationale Transformation erwiesen. Ihr Übereinstimmen ist demnach notwendig für die Äquivalenz zweier Formen in $K(1)$.

Es ist nun nicht schwer, mit den in *HI* gewonnenen Resultaten nachzuweisen [2]), daß für $n \leqq 3$ die dort angegebenen Invariantensysteme, also

$$\begin{aligned} &\text{für } n = 1 : d \quad , \\ &\text{,,} \quad n = 2 : d, (\check{c}_p), \\ &\text{,,} \quad n = 3 : d, (\hat{c}_p), \end{aligned}$$

die Eigenschaft haben, daß alle und nur die Formen, für die alle Einzelinvarianten

[1]) Dieses Journ., Bd. 152, S. 129 ff., im folgenden zitiert mit *H I*.
[2]) Siehe § 2 dieser Arbeit.

dieser Systeme übereinstimmen, in $K(1)$ äquivalent sind, sodaß also in diesem Sinne jene Systeme *vollständige Invariantensysteme gegen rationale Transformation* genannt werden können.

Für Formen von mehr als 3 Variablen läßt sich dasselbe für das in *H I* erhaltene System d, J nicht schließen. Man kann jedoch hier durch folgende einfache Bemerkung einen Schritt weiter kommen. Nach *H I*, Satz 22 (S. 147) stellt für $n \geqq 4$ jede n-äre Form f eine der Zahlen $+1$ oder -1 rational dar. Daraus folgt in bekannter Weise leicht, daß f in eine Form der Gestalt $f_1 = \pm x_1^2 + \psi_1(x_2, \ldots, x_n)$ rational transformiert werden kann. Dasselbe Verfahren läßt sich auf ψ_1 anwenden und so lange fortsetzen, bis eine ternäre „Restform" ψ auftritt, sodaß f schließlich stets einer Form

$$(1.) \qquad f_0 = \sum_{i=1}^{n-3} (\pm x_i^2) + \psi(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) = g + \psi$$

in $K(1)$ äquivalent ist, in der nach dem Trägheitsgesetz die Anzahl der $\left\{\begin{matrix}\text{positiven}\\\text{negativen}\end{matrix}\right\}$ Zeichen in g nicht größer als $\left\{\begin{matrix}n-J\\J\end{matrix}\right\}$ sein kann, in diesen Grenzen aber, wie man leicht erkennt, beliebig ist.

Stimmen nun zwei Formen f und f' in ihren Invarianten n ($\geqq 4$), d und J überein, so lassen sie sich in die Gestalt (1.), also in zwei Formen:

$$(1a.) \qquad f_0 = g + \psi \text{ bezw. } f_0' = g + \psi'$$

mit demselben g transformieren, und ψ, ψ' haben denselben Diskriminantenkern. Nach dem oben Bemerkten sind dann ψ und ψ', also auch f und f' sicher dann in $K(1)$ äquivalent, wenn außerdem noch die Invarianten $(\hat{c}_p(\psi))$ und $(\hat{c}_p(\psi'))$ der ternären Restformen übereinstimmen. Während aber d und J als tatsächliche Invarianten gegen rationale Transformation in einem vollständigen Invariantensystem vorkommen müssen, ist dies für $(\hat{c}(\psi))$ nicht ohne weiteres selbstverständlich. Denn es wäre ja denkbar, daß trotz der Verschiedenheit der $(\hat{c}_p(\psi))$ und $(\hat{c}_p(\psi'))$ zwar nicht die ternären Formen ψ und ψ' — dies ist nach dem oben Bemerkten unmöglich —, aber doch die n-ären f_0 und f_0' und somit f und f' in $K(1)$ äquivalent wären. Es bliebe also noch nachzuweisen, daß für zwei in $K(1)$ äquivalente Formen der Gestalt (1a.): $\hat{c}_p(\psi) \equiv \hat{c}_p(\psi')$ ist[1]).

Nun hat *Minkowski*[2]) die Existenz eines vollständigen Invariantensystems gegen rationale Transformation für beliebige quadratische Formen nachgewiesen. Er findet als Invarianten dieses Systems außer den trivialen n, d, J ein System von Einheiten C_p für jede endliche Primzahl p. Es lag also außerordentlich nahe, die Identität oder eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den *Minkowski*schen C_p und meinen $\hat{c}_p(\psi)$ zu vermuten; dann und nur dann wäre auch das Invariantensystem $n, d, J, (\hat{c}_p(\psi))$ ein vollständiges. Der Nachweis einer solchen Beziehung fällt nun zwar auf Grund der *Minkowski*schen Darstellung seiner C_p nicht schwer[3]). Es erschien mit jedoch möglich und von hohem Interesse, auch

---

[1]) Das Zeichen: $\equiv$ bedeutet ebenso wie in *H I* „für alle p (einschl. p_∞) gleich".

[2]) „Über die Bedingungen, unter welchen zwei quadr. Formen mit rat. Koeffiz. ineinander rat. transformiert werden können", Brief an *Hurwitz*, *Minkowskis* Ges. Abh. I, S. 219 ff., dieses Journ. Bd. 106, S. 5 ff.

[3]) Siehe § 4 dieser Arbeit.

unabhängig von den *Minkowski*schen Resultaten, allein unter Benutzung der in *H I* entwickelten Methoden und Sätze zur Aufstellung eines vollständigen Invariantensystems zu gelangen.

Minkowski[1]) stützt nämlich die Herleitung seines Systems (C_p) wesentlich auf seine systematische Darstellung der Theorie der quadratischen Formen für den Ring $R(1)$ der ganzen Zahlen[2]) Er definiert dort Ordnung und Geschlecht einer ganzzahligen, primitiven quadratischen Form $f = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k ; (a_{ik} = a_{ki})$, indem er alle und nur die Formen zu einem Geschlecht rechnet, die für jeden beliebigen Modul „kongruent" sind, d. h. in *Hensel*scher Ausdrucksweise, für jedes endliche p (und wegen der weiter vorausgesetzten Gleichheit von J auch für p_∞) durch eine ganzzahlige p-adische Substitution mit der Determinante 1 zusammenhängen. Dann zeigt er, daß zwei Formen dann und nur dann zum selben Geschlecht gehören, wenn

a). ihre *Ordnung* dieselbe ist, d. h. die Invarianten

$$n, J, \binom{o_1, o_2, \ldots, o_{n-1}}{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}} \tag{2.}$$

übereinstimmen, (die o_i sind die (stets ganzzahligen) Elementarteilerquotienten $\frac{e_{i+1}}{e_i}$ des Koeffizientensystems (a_{ik}), die $\sigma_i = 1$ oder 2, je nachdem unter allen i-reihigen Hauptunterdeterminanten von (a_{ik}) eine ungerade vorhanden ist oder nicht),

b). ein System von *Charakteren* ± 1 übereinstimmt. Es sind die *Legendre*schen Symbole

$$\text{(3.)} \quad \begin{cases} \text{für ungerades } p : \mathfrak{C}_i(p) = \left(\frac{f_i}{p}\right) & \text{für } o_i \equiv 0 \bmod p, \\ \text{„ } \quad p = 2 \quad : \mathfrak{C}_i(4) = \left(\frac{-1}{f_i}\right) \text{ und zwei weitere Charakteren } \mathfrak{C}_i^+(4),\ \mathfrak{C}_i^-(4) & \\ & \text{für } \sigma_{i-1}\, o_i\, \sigma_{i+1} \equiv 0 \bmod 4, \\ \mathfrak{C}_i(8) = \left(\frac{2}{f_i}\right) & \text{für } \sigma_{i-1}\, o_i\, \sigma_{i+1} \equiv 0 \bmod 8 \end{cases}$$

(die f_i sind die aus den ersten i Reihen gebildeten Hauptunterdeterminanten einer zu f in $K(1)$ äquivalenten *charakteristischen* Form, d. h. einer solchen, (stets leicht herstellbaren), in der die f_i zu $2 o_1 o_2 \ldots o_{n-1}$ und zu f_{i-1}, f_{i+1} prim sind)[3]).

Schließlich weist *Minkowski* darauf hin[4]), *daß alle und nur die Formen eines Geschlechts durch rationale Substitutionen der Determinante* 1 *mit zu* $2 o_1 o_2 \ldots o_{n-1}$, *also zu* 2 *und der Diskriminante primem Generalnenner zusammenhängen*, sodaß das System der Invarianten (2.) und (3.) ein vollständiges Invariantensystem gegen solche Substitutionen ist[5]). Für das Äquivalenzproblem (I.), S. 205 in $K(1)$ ergibt sich daraus die Fragestellung, wie sich das Invariantensystem (2.), (3.) reduziert, wenn die Beschränkungen für Determinante und Generalnenner der Substitutionen weggelassen werden.

Diese Frage untersucht *Minkowski* in dem genannten Briefe und kommt zu dem angegebenen

---

[1]) Die Kenntnis der in diesem eng gedruckten Abschnitt skizzierten Untersuchungen von *Minkowski* ist zum Verständnis der vorliegenden Arbeit nicht notwendig. Der Abschnitt soll nur dazu dienen, die Zweckmäßigkeit der in dieser Arbeit eingeschlagenen Behandlungsweise gegenüber der *Minkowski*schen hervortreten zu lassen.

[2]) „Grundlagen für eine Theorie der quadr. Formen mit ganzz. Koeffizienten," *Minkowskis* Ges. Abh. I, S. 3 ff.

[3]) Vgl. *Minkowski*, Ges. Abh. I, S. 4—7.

[4]) Ges. Abh. I, S. 150, 158, 221 f.

[5]) Im Hinblick auf die oben angeführte Bedeutung der Einteilung in Geschlechter in *Hensel*scher Ausdrucksweise ist dieser Satz ein gewisses Analogon zu dem Fundamentalsatz (II), S. 130 in *H I*, sowie zu dem Prinzip (II.) dieser Arbeit (siehe unten S. 208).

Resultat. Jede der Invarianten C_p wird dort in gewisser Weise aus den auf das betr. p bezüglichen unter den Invarianten (2.), (3.), d. h. aus den in den einzelnen o_i und σ_i enthaltenen Potenzen von p und den Charakteren $\mathfrak{C}_i(p)$ zusammengesetzt. Die Invarianz von (C_p) gegen beliebige rationale Substitutionen wird dann nach denselben Prinzipien, wie die Invarianz von (3.) gegen die genannten spezielleren rationalen Substitutionen (mittels verallgemeinerter *Gauß*scher Summen) erschlossen, ihre Eigenschaft, ein vollständiges Invariantensystem gegen beliebige rationale Substitutionen zu bilden, ebenfalls aus der entsprechenden Eigenschaft der Invarianten (2.), (3.) für die spezielleren Substitutionen. In der endgültigen Darstellung der C_p [1]) treten die für die Untersuchungen (speziell für die Darstellbarkeitstheorie) in $R(1)$ maßgebenden Invarianten (2.), (3.) nicht selbst auf, sondern nur die für $K(1)$ allein maßgebenden von p-adischen Quadraten befreiten Kerne der o_i und ein gewisses (durch diese Kerne bestimmtes) Produkt der auf das betr. p bezüglichen $\mathfrak{C}_i(p)$.

Der skizzierte Weg zur Herleitung der C_p war natürlich für *Minkowski* auf Grund seiner ausführlichen Theorie der quadratischen Formen in $R(1)$ der gegebene. Aus genau denselben Gründen jedoch, wie ich sie in *H I*, § 1 dargelegt habe (meine dortigen Ausführungen über das Darstellungsproblem gelten fast wörtlich ebenso für das Äquivalenzproblem (I.)), erschien es mir von großer Bedeutung, eine von der Theorie in $R(1)$ unabhängige Begründung der Äquivalenztheorie in $K(1)$ zu geben und so den z. T. recht komplizierten und weit ausholenden Weg von *Minkowski* zu vermeiden. Dies ist mir in der Tat gelungen, und ich will in dieser Arbeit meine diesbezüglichen Untersuchungen mitteilen.

Ich weise zunächst direkt die Existenz einer gegen p-adische Transformation invarianten Einheit c_p nach (§ 1) und zeige dann leicht, daß das System n, d_p, c_p bezw. für p_∞: n, J ein vollständiges Invariantensystem gegen p-adische Transformation und das auf alle p erstreckte System (c_p) zusammen mit n, d, J ein solches gegen rationale Transformation ist (§ 2). Dabei ergibt sich von selbst das bemerkenswerte, zu meinem Fundamentalsatz (II.) in *H I*, S. 130 analoge Prinzip:

(II.) *Quadratische Formen sind dann und nur dann in $K(1)$ äquivalent, wenn sie in allen $K(p)$ äquivalent sind.*

Ich untersuche sodann, wann umgekehrt ein beliebig gegebenes System von Größen $n, d, J, (c_p)$ vollständiges Invariantensystem einer wirklichen quadratischen Form ist (§ 3). Mit den gewonnenen Ergebnissen will ich in einer weiteren, sich an diese anschließenden Arbeit allgemeine, nicht mehr umkehrbare Transformationen der quadratischen Formen untersuchen und damit die in *H I* gewonnenen Darstellbarkeitssätze sowie die Resultate dieser Arbeit erheblich verallgemeinern.

Alle diese Untersuchungen, die z. T. auch schon von *Minkowski* a. a. O. kurz ausgeführt oder angedeutet sind, gewinnen in meiner systematischen Darstellung an Einheitlichkeit und Vollständigkeit. Eine besondere Vereinfachung erziele ich durch Verwendung des *Hilbert*schen Symbols zur Darstellung meiner c_p. Hierdurch wird jede gesonderte Behandlung der Primzahl 2 überflüssig, während bei *Minkowski* gerade die auf $p = 2$ bezüglichen Untersuchungen und Resultate am kompliziertesten sind und stets eine von den auf ungerade p bezüglichen Untersuchungen getrennte Behandlung erfordern.

---

[1]) Ges. Abh. I, S. 231 f. Vgl. diese Arbeit, § 4.

Zum Schluß (§ 4) untersuche ich noch die Beziehung zwischen den *Minkowski*schen C_p und meinen c_p bezw. $\hat{c}_p\,(\psi)$ (S. 206) und weise die Gleichwertigkeit dieser drei Invariantensysteme nach.

§ 1. Die Invarianten gegen p-adische Transformation.

Wie in *H I* lege ich den folgenden Betrachtungen quadratische Formen

$$f = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i\, x_k;\ (a_{ik} = a_{ki});\ \text{kurz}\ f = (a_{ik})$$

mit $\left\{\begin{matrix}p\text{-adischen}\\ \text{rationalen}\end{matrix}\right\}$ Koeffizienten zugrunde, deren Diskriminante $|a_{ik}|$ ich vorläufig von Null verschieden voraussetze, und denke mir auf sie umkehrbare lineare Substitutionen S:

$$x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}\, x'_k;\ (|\alpha_{ik}| \neq 0);\ \text{kurz}\ S = (\alpha_{ik})$$

mit $\left\{\begin{matrix}p\text{-adischen}\\ \text{rationalen}\end{matrix}\right\}$ Koeffizienten angewandt. Das Resultat einer solchen Substitution ist bekanntlich die neue Form

$$g = S'\, f\, S.$$

Dabei bleiben zunächst die Variablenzahl n und der Diskriminantenkern $\left\{\begin{matrix}d_p\\ d\end{matrix}\right\}$ der Form invariant. Die weiteren, in der Einleitung genannten Invarianten c_p ergeben sich aus dem folgenden Hauptsatz, dessen Nachweis den Mittelpunkt dieser Arbeit bildet.

Satz 1: *Sind zwei „reine" n-äre Formen*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i^2 \ \textit{und}\ f' = \sum_{i=1}^{n} a'_i\, x_i^2$$

in irgendeinem $K(p)$ äquivalent, so stimmen die Einheiten

$$\bar{c}_p(f) = \prod_{\substack{i,k=1\\ i\leq k}}^{n} \left(\frac{a_i, a_k}{p}\right) \ \textit{und}\ \bar{c}_p(f') = \prod_{\substack{i,k=1\\ i\leq k}}^{n} \left(\frac{a'_i, a'_k}{p}\right)$$

überein.

Beweis: Den Nachweis führe ich durch Induktion. Für $n = 1, 2, 3$ ist, wenn $\check{c}_p$ und $\hat{c}_p$ die in *H I* (S. 135, Satz 4,5) so bezeichneten Invarianten bedeuten, bezw.[1]):

$$(4.)\quad \bar{c}_p = \left(\frac{a_1, a_1}{p}\right) = \left(\frac{a_1, -1}{p}\right) = \left(\frac{d_p, -1}{p}\right),$$

$$(5.)\quad \bar{c}_p = \left(\frac{a_1, a_1}{p}\right)\left(\frac{a_1, a_2}{p}\right)\left(\frac{a_2, a_2}{p}\right) = \left(\frac{a_1 a_2, -1}{p}\right)\left(\frac{a_1, -a_1 a_2}{p}\right) = \left(\frac{d_p, -1}{p}\right)\check{c}_p,$$

$$(6.)\quad \bar{c}_p = \left(\frac{a_1, a_1}{p}\right)\left(\frac{a_1, a_2}{p}\right)\left(\frac{a_1, a_3}{p}\right)\left(\frac{a_2, a_2}{p}\right)\left(\frac{a_2, a_3}{p}\right)\left(\frac{a_3, a_3}{p}\right)$$

$$= \left(\frac{a_1, -a_2 a_3}{p}\right)\left(\frac{-1, -a_2 a_3}{p}\right)\left(\frac{a_2, -a_2 a_3}{p}\right)\left(\frac{-1, -1}{p}\right)$$

$$= \left(\frac{-a_1 a_2, -a_2 a_3}{p}\right)\left(\frac{-1, -1}{p}\right) = \left(\frac{-1, -1}{p}\right)\hat{c}_p.$$

---

[1]) Ich weise auf Vertauschungs- und Zerlegungssatz für das *Hilbert*sche Symbol, sowie auf die einfach zu beweisende Regel $\left(\frac{a, -a}{p}\right) \equiv +1$, also $\left(\frac{a, a}{p}\right) \equiv \left(\frac{a, -1}{p}\right)$ hin, aus der noch folgt: $\left(\frac{a, b}{p}\right) \equiv \left(\frac{a, -ab}{p}\right)$.

Wegen der in *H I* bewiesenen Invarianz von $d_p, \check{c}_p, \hat{c}_p$ gegen p-adische Transformation ist also auch $\bar{c}_p$ invariant gegen solche und der Satz richtig für $n = 1, 2, 3$.

Sei nun $n > 3$. Dann nehme ich an, der Satz gälte schon bis $n-1$, und weise daraus seine Gültigkeit auch für n nach. Dann folgt seine Allgemeingültigkeit durch Induktion.

Ich setze

$$\begin{aligned} f &= a_1 x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} a_i x_i^2 \qquad \text{und} \quad f' = a_1' x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} a_i' x_i^2 \\ &= a_1 x_1^2 + \varphi(x_2, \ldots, x_n) \qquad\quad = a_1' x_1^2 + \varphi'(x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

und darf dabei die Variablen x_1 in beiden Formen so gewählt denken, daß in der nach Voraussetzung bestehenden, f in f' überführenden Substitution $S = (\alpha_{ik})$; $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ der erste Koeffizient $\alpha_{11} \neq 0$ ist. Die Reihenfolge der übrigen Variablen $x_2, \ldots, x_n$ in jeder der beiden Formen ist dann noch vollkommen willkürlich. Aus dem Bestehen der Substitution S zwischen f und f' folgen u. a. die Gleichungen:

$$(7.) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_{i1} \alpha_{ik} = \begin{cases} a_1' & \text{für } k = 1, \\ 0 & \text{,, } 1 < k \leqq n. \end{cases}$$

Wie man leicht bestätigt, geht f durch die zusammengesetzte Substitution

$$S_0 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 \ldots 0 \\ \alpha_{21} & 1 \ldots 0 \\ \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ \alpha_{n1} & 0 \ldots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_2}{a_1'}\alpha_{11} \ldots -\frac{a_n}{a_1'}\alpha_{n1} \\ 0 & 1 \ldots\ldots 0 \\ \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ 0 & 0 \ldots\ldots 1 \end{pmatrix}$$

mit der Determinante $\alpha_{11} \neq 0$ in die Form

$$\bar{f}_0 = \begin{pmatrix} a_1' & 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ 0 & a_2 - \frac{a_2^2 \alpha_{21}^2}{a_1'} & -\frac{a_2 a_3 \alpha_{21} \alpha_{31}}{a_1'} \ldots -\frac{a_2 a_n \alpha_{21} \alpha_{n1}}{a_1'} \\ 0 & -\frac{a_3 a_2 \alpha_{31} \alpha_{32}}{a_1'} & a_3 - \frac{a_3^2 \alpha_{31}^2}{a_1'} \ldots -\frac{a_3 a_n \alpha_{31} \alpha_{n1}}{a_1'} \\ \vdots & \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ 0 & -\frac{a_n a_2 \alpha_{n1} \alpha_{21}}{a_1'} & -\frac{a_n a_3 \alpha_{n1} \alpha_{31}}{a_1'} \ldots a_n - \frac{a_n^2 \alpha_{n1}^2}{a_1'} \end{pmatrix}$$

$$= a_1' x_1^2 + \bar{\varphi}_0(x_2, \ldots, x_n)$$

über. (Der erste Teil von S_0 bewirkt nach (7.), daß $\bar{f}_0$ den ersten Koeffizienten a_1' bekommt, der zweite ist so bestimmt, daß die übrigen Glieder der ersten Zeile und Spalte in $\bar{f}_0$ gleich 0 werden.) Dann geht $\bar{f}_0$ durch $S_0^{-1} S$ in f' über. Diese Substitution hat aber, wie man mittels der Gleichungen (7.) leicht bestätigt, die Gestalt:

$$S_0^{-1} S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \beta_{22} \ldots \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & \beta_{n2} \ldots \beta_{nn} \end{pmatrix}, \quad \left(\text{wo } \beta_{ik} = \frac{a_{11} a_{ik} - \alpha_{i1} \alpha_{1k}}{a_{11}}\right).$$

Daraus folgt, daß schon die $(n-1)$-ären Teilformen $\bar{\varphi}_0$ und φ' von $\bar{f}_0$ und f' durch die Substitution (β_{ik}); $(i, k = 2, 3, \ldots, n)$ zusammenhängen. Ist also

$$\varphi_0 = \sum_{i=2}^{n} a_i^{(0)} x_i^2$$

irgendeine zu $\bar{\varphi}_0$ äquivalente, reine Form, und setzt man

$$f_0 = a_1' x_1^2 + \varphi_0(x_2, \ldots, x_n),$$

so folgt aus der Annahme der Gültigkeit des Satzes für $n-1$:

$$\bar{c}_p(\varphi_0) = \bar{c}(\varphi').$$

Aus dem Übereinstimmen der Diskriminantenkerne von φ_0 und φ' folgt dann weiter auch:

$$\bar{c}_p(f_0) = \left(\frac{a_1', a_1'}{p}\right)\left(\frac{a_1', a_2^{(0)} \ldots a_n^{(0)}}{p}\right)\bar{c}_p(\varphi_0) = \left(\frac{a_1', a_1'}{p}\right)\left(\frac{a_1', a_2' \ldots a_n'}{p}\right)\bar{c}_p(\varphi') = \bar{c}_p(f').$$

Ich habe demnach nur noch die Gleichheit von $\bar{c}_p(f)$ und $\bar{c}_p(f_0)$ zu zeigen. f_0 geht aus f durch die spezielle Substitution S_0 und irgendeine Reduktion auf rein quadratische Glieder (ein Diagonalsystem) hervor. Da S_0 nur noch die n in der ersten Spalte von S stehenden Koeffizienten a_{i1} enthält, ist somit die Aufgabe des Beweises bedeutend vereinfacht. Der Kürze halber bezeichne ich die a_{i1} von jetzt an mit a_i.

Zur Bestimmung von $\bar{c}_p(f_0) = \bar{c}_p(a_1' x_1^2 + \varphi_0)$ nach der im Satz gegebenen Bildungsregel habe ich zunächst φ_0 tatsächlich herzustellen, d. h. irgendeine zu

$$\bar{\varphi}_0 = \begin{pmatrix} a_2\dfrac{a_1' - a_2\alpha_2^2}{a_1'} & -\dfrac{a_2 a_3 \alpha_2 \alpha_3}{a_1'} & \ldots & -\dfrac{a_2 a_n \alpha_2 \alpha_n}{a_1'} \\ -\dfrac{a_3 a_2 \alpha_3 \alpha_2}{a_1'} & a_3\dfrac{a_1' - a_3\alpha_3^2}{a_1'} & \ldots & -\dfrac{a_3 a_n \alpha_3 \alpha_n}{a_1'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\dfrac{a_n a_2 \alpha_n \alpha_2}{a_1'} & -\dfrac{a_n a_3 \alpha_n \alpha_3}{a_1'} & \ldots & a_n\dfrac{a_1' - a_n\alpha_n^2}{a_1'} \end{pmatrix}$$

äquivalente reine Form φ_0 zu bestimmen. Dazu wende ich auf $\bar{\varphi}_0$ das bekannte Verfahren [1]) an, das darin besteht, schrittweise durch Substitutionen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_2 & \ldots & t_\lambda \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

im ersten Schritt sämtliche seitlichen Koeffizienten der ersten Zeile und Spalte, im zweiten die der zweiten usw. zum Verschwinden zu bringen, was durch passende (ganz bestimmte) Wahl der t_k leicht erreicht wird. Setzt man zur Abkürzung

$$(8.)\quad \begin{cases} a_1' & = & u_1 \\ a_1' - a_2\alpha_2^2 & = u_1 - a_2\alpha_2^2 & = u_2 \\ a_1' - a_2 a_2^2 - a_3\alpha_3^2 & = u_2 - a_3\alpha_3^2 & = u_3 \\ \quad\ldots\ldots\ldots

$$(9.)\qquad \begin{pmatrix} a_2\frac{u_2}{u_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_3\frac{u_3}{u_2} & \dots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{r-1}\frac{u_{r-1}}{u_{r-2}} & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_r\frac{u_{r-1}-a_r a_r^2}{u_{r-1}} & -\frac{a_r a_{r+1} a_r a_{r+1}}{u_{r-1}} & \dots & -\frac{a_r a_n a_r a_n}{u_{r-1}} \\ -\frac{a_{r+1} a_r a_{r+1} a_r}{u_{r-1}} & a_{r+1}\frac{u_{r-1}-a_{r-1}a_{r-1}^2}{u_{r-1}} & \dots & -\frac{a_{n+1} a_n a_{r+1} a_n}{u_{r-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{a_n a_r a_n a_r}{u_{r-1}} & -\frac{a_n a_{r+1} a_n a_{r+1}}{u_{r-1}} & \dots & a_n\frac{u_{r-1}-a_n a_n^2}{u_{r-1}} \end{pmatrix}$$

Das Verfahren läßt sich fortsetzen, solange $u_{r-1} - a_r a_r^2 \neq 0$ ist. Nun kann man offenbar die bisher noch willkürliche Reihenfolge der Variablen $x_2, \dots, x_n$ in $\overline{\varphi}_0$ so gewählt denken, daß, wenn einmal

$$(10.)\qquad u_r = u_{r-1} - a_r a_r^2 = 0$$

werden sollte, auch alle weiteren in (9.) in der Diagonale folgenden Größen

$$(11.)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_r^{(1)} = u_{r-1} - a_{r+1} a_{r+1}^2 \\ u_r^{(2)} = u_{r-1} - a_{r+2} a_{r+2}^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ u_r^{(n-r)} = u_{r-1} - a_n a_n^2 \end{array}\right\} = 0$$

werden. Denn solange noch eine dieser Größen, etwa $u_r^{(\nu)} \neq 0$ ist, tritt durch Vertauschung von x_r mit $x_{r+\nu}$ in $\overline{\varphi}_0$ dies $u_r^{(\nu)}$ an die Stelle von u_r. (Solche Vertauschungen entsprechen einfachen Substitutionen und ändern infolgedessen nichts an den Äquivalenzen zu Beginn des Beweises.) Bezeichnet dann r denjenigen Index, für den zum letzten Male mindestens eine der Größen u_{r-1}, $u_{r-1}^{(\nu)}$, also bei Annahme unserer neuen Reihenfolge die Größe u_{r-1}, von Null verschieden ist, so können zwei Fälle eintreten:

a) $r = n + 1$.

Dann läßt sich das angegebene Verfahren bis zu Ende durchführen, und man gelangt schließlich zu der reinen Form $\sum_{i=2}^{n} a_i \frac{u_i}{u_{i-1}} x_i^2$ oder der äquivalenten

$$\varphi_0 = \sum_{i=2}^{n} a_i\, u_{i-1}\, u_i\, x_i^2.$$

b) $2 \leqq r \leqq n - 1$.

(Der Fall $r = n$ würde, wie man aus (9.) leicht erkennt, das Verschwinden der Diskriminante von $\overline{\varphi}_0$ zur Folge haben, kann also nie eintreten.) Dann bestehen alle Gleichungen (10.), (11.), und die nach $r - 2$ Schritten noch übrige, nicht reine Teilform ist:

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_r a_{r+1} a_r a_{r+1}}{u_{r-1}} & \cdots & -\frac{a_r a_n a_r a_n}{u_{r-1}} \\ -\frac{a_{r+1} a_r a_{r+1} a_r}{u_{r-1}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{r+1} a_n a_{r+1} a_n}{u_{r-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{a_n a_r a_n a_r}{u_{r-1}} & -\frac{a_n a_{r+1} a_n a_{r+1}}{u_{r-1}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{a_r^2 a_{r+1}^2 \cdots a_n^2 a_r^2 a_{r+1}^2 \cdots a_n^2}{u_{r-1}} \cdot \bar{\psi} \sim u_{r-1} \cdot \bar{\psi},$$

wo

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

gesetzt ist; (wegen des Nichtverschwindens der Diskriminante müssen natürlich hier $a_r, a_{r+1}, \ldots, a_n \neq 0$ sein). Um noch $\bar{\psi}$ in eine reine Form zu transformieren, wende ich zunächst die Substitution

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

an, die zur Folge hat, daß sich die mit $-\frac{1}{2}$ multiplizierten Elemente der zweiten Zeile und Spalte von $\bar{\psi}$ zu denen der ersten Zeile und Spalte addieren. Die so entstehende Form $\bar{\psi}$ hat dann den ersten Koeffizienten

$$H_1 = 1,$$

während die aus den ersten ν Reihen gebildeten Hauptunterdeterminanten H_ν von $\bar{\psi}$ für $\nu \geqq 2$ mit den entsprechenden von $\bar{\psi}$ übereinstimmen. Nach einem bekannten Determinantensatze ist also für $2 \leqq \nu \leqq n - r + 1$:

$$H_\nu = -(\nu - 1) \neq 0$$

und daher, wie aus der Algebra bekannt, $\bar{\psi}$ und somit $\bar{\psi}$ äquivalent der reinen Form

$$\bar{\psi}_0 = H_1 x_r^2 + \frac{H_2}{H_1} x_{r+1}^2 + \cdots + \frac{H_{n-r+1}}{H_{n-r}} x_n^2 = x_r^2 - x_{r+1}^2 + \sum_{i=2}^{n-r} \frac{i}{i-1} x_{r+i}^2$$

$$\sim x_r^2 - x_{r+1}^2 + \sum_{i=2}^{n-r} (i-1)\, i\, x_{r+i}^2.$$

Da ferner nach (10.), (11.) der Faktor u_{r-1} sich von $a_r, a_{r+1}, \ldots, a_n$ nur um quadratische Faktoren unterscheidet, ist $\psi = u_{r-1} \bar{\psi}$ äquivalent der reine Form

$$\psi_0 = a_r x_r^2 - a_{r+1} x_{r+1}^2 + \sum_{i=2}^{n-r} a_{r+i} (i-1)\, i\, x_{r+i}^2,$$

und somit nach (9.) schließlich $\bar{\varphi}_0$ äquivalent der reinen Form

$$\varphi_0 = \sum_{i=2}^{r-1} a_i\, u_{i-1}\, u_i\, x_i^2 + a_r\, x_r^2 - a_{r+1}\, x_{r+1}^2 + \sum_{i=2}^{n-r} a_{r+i}\,(i-1)\, i\, x_{r+i}^2.$$

Die damit in allen Fällen gefundene, zu $\bar{f}_0$ äquivalente, reine Form

$$f_0 = a_1' x_1^2 + \varphi_0 = u_1 x_1^2 + \varphi_0$$

zerlege ich in die beiden Teilformen:

$$f_1 = u_1 x_1^2 + \sum_{i=2}^{r-1} a_i\, u_{i-1}\, u_i\, x_i^2,$$

$$f_2 = a_r x_r^2 - a_{r+1} x_{r+1}^2 + \sum_{i=2}^{n-r} a_{r+i}\,(i-1)\, i\, x_{r+i}^2.$$

Im Falle a) $r = n+1$ fällt dabei f_2 fort; im Falle b) $2 \leqq r \leqq n+1$ reduziert sich f_1 für $r=2$ auf $u_1 x_1^2$, f_2 für $r = n-1$ auf $a_r x_r^2 - a_{r+1} x_{r+1}^2$, (beides zusammen tritt wegen $n > 3$ nicht auf). Für $2 < r < n-1$ treten die $\sum_i$ in f_1 und f_2 tatsächlich mit mindestens einem Gliede auf.

Zur Berechnung von $\bar{c}_p(f_0)$ benutze ich die aus dem Bildungsgesetz für $\bar{c}_p$ sofort hervorgehende Gleichung:

$$(12.) \qquad \bar{c}_p(f_0) = \bar{c}_p(f_1 + f_2) = \bar{c}_p(f_1)\, c_p(f_2) \left(\frac{d(f_1), d(f_2)}{p}\right),$$

ferner die Beziehungen:

$$(13.) \qquad \left(\frac{u_i, u_{i-1}\, a_i}{p}\right) = \left(\frac{u_{i-1}, u_{i-1}\, a_i}{p}\right); \qquad (i=2,3,\ldots,r-1),$$

die sich nach *HI*, Satz 5 (S. 135) ergeben, wenn man die Gleichungen (8.) als Darstellungen der u_i durch die binären Formen $u_{i-1} y_1^2 - a_i y_2^2$ ansieht, weiter die aus (10.), (11.) folgenden Gleichungen:

$$(14.) \qquad a_r a_r^2 = a_{r+1} a_{r+1}^2 = \cdots = a_n a_n^2; \quad (2 \leqq r \leqq n-1),$$

sowie die aus (7.) mittels (8.), (10.), (11.) folgende Gleichung:

$$(15.) \qquad a_1 a_1^2 = -(n-r)\, u_{r-1}; \quad (2 \leqq r \leqq n-1;\ r = n+1)$$

und die aus (10.), (11.) und (15.) folgenden Gleichungen:

$$(16.) \qquad a_1 a_1^2 = -(n-r)\, a_{r+i}\, a_{r+i}^2; \quad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, n-r, \\ 2 \leqq r \leqq n-1 \end{pmatrix},$$

schließlich die auf S. 209 Anm. 1 genannten Formeln für das *Hilbert*sche Symbol. In jedem *Hilbert*schen Symbole darf nach (14.) jede der Größen $a_r, \ldots, a_n$ für jede andere dieser Größen und nach (15.) und (16.) $-(n-r)\, a_1$ an ihre oder an Stelle von u_{r-1} treten. Mit Hilfe von (12.)—(16.) berechnet sich dann $\bar{c}_p(f_0)$ folgendermaßen:

Für $r > 2$ ist:

$$\bar{c}_p(f_1) = (u_1, a_2 \ldots a_{r-1}\, u_{r-1}) \prod_{\substack{i,k=2 \\ i \leqq k}}^{r-1} (a_i\, u_{i-1}\, u_i, a_k\, u_{k-1}\, u_k)\ ^{1})$$

$$= (u_1, a_2 \ldots a_{r-1}\, u_{r-1}) \cdot \prod_{\substack{i,k=2 \\ i \leqq k}}^{r-1} (a_i, a_k) \cdot \prod_{k=2}^{r-1} \prod_{i=2}^{k} (a_i, u_{k-1}\, u_k)\, (u_{i-1}\, u_i, a_k)$$

$$(u_{i-1}\, u_i, u_{k-1}\, u_k)$$

---

[1]) Die „Nenner“ p der *Hilbert*schen Symbole werden bis zum Schluß des Beweises der Kürze halber weggelassen.

$$= \prod_{\substack{i,k=2 \\ i\leqq k}}^{r-1} (a_i, a_k) \cdot (u_1, a_2 \ldots a_{r-1}\, u_{r-1}) \cdot \prod_{k=2}^{r-1} (a_2 \ldots a_k, u_{k-1}\, u_k)\, (u_1\, u_k, a_k)$$

$$(u_1\, u_k, u_{k-1}\, u_k)$$

$$= \prod_{\substack{i,k=2 \\ i\leqq k}}^{r-1} (a_i, a_k) \cdot (u_1, a_2 \ldots a_{r-1}\, u_{r-1})\, (u_1, a_2 \ldots a_{r-1})\, (u_1, u_1\, u_{r-1})$$

$$\cdot \prod_{k=2}^{r-1} (a_2 \ldots a_k, u_{k-1}\, u_k)\, (u_k, u_{k-1}\, a_k)\, (u_k, u_k)$$

$$= \prod_{\substack{i,k=2 \\ i\leqq k}}^{r-1} (a_i, a_k) \cdot (u_1, u_1) \cdot \prod_{k=2}^{r-1} (a_2 \ldots a_k, u_{k-1})\, (a_2 \ldots a_k, u_k)\, (a_k, u_{k-1})\, (u_{k-1}, u_{k-1})$$

$$(u_k, u_k) \quad \text{(nach (13))}$$

$$= \prod_{\substack{i,k=2 \\ i\leqq k}}^{r-1} (a_i, a_k) \cdot (u_{r-1}, u_{r-1}) \cdot \prod_{k=2}^{r-1} (a_2 \ldots a_{k-1}, u_{k-1})\, (a_2 \ldots a_k, u_k)\ ^{1})$$

$$= \prod_{\substack{i,k=2 \\ i\leqq k}}^{r-1} (a_i, a_k) \cdot (a_2 \ldots a_{r-1}\, u_{r-1}, u_{r-1})$$

$$= \prod_{\substack{i,k=2 \\ i\leqq k}}^{r-1} (a_i, a_k) \cdot (-(n-r)\, a_1 \ldots a_{r-1}, -(n-r)\, a_1).$$

$$\bar{c}_p(f_1) = \prod_{\substack{i,k=1 \\ i\leqq k}}^{r-1} (a_i, a_k) \cdot (-(n-r), -a_2 \ldots a_{r-1}), \tag{17.}$$

was, wie man sofort sieht, auch in dem noch ausgeschlossenen Fall $r = 2$ stimmt, da dann das letzte Symbol $(-(n-2), -1)$ wird und $\bar{c}_p(f_1) = (a_1, a_1)\ (-(n-2), -1) = (u_1, u_1)$ herauskommt, wie es sein soll (siehe S. 214 oben).

Für $r = n + 1$ ergibt sich aus (17.):

$$\bar{c}_p(f_0) = \bar{c}_p(f_1) = \prod_{\substack{i,k=1 \\ i\leqq k}}^{n} (a_i, a_k) = \bar{c}_p(f),$$

womit in diesem Falle der Satz bewiesen ist.

Weiter ist für $2 \leqq r < n - 1$:

$$\bar{c}_p(f_2) = (a_r, a_r)\, (a_r, -a_{r+1})\, (-a_{r+1}, -a_{r+1})\, (-a_r\, a_{r+1}, (n-r)\, a_{r+2} \ldots a_n)$$

$$\prod_{\substack{i,k=2 \\ i\leqq k}}^{n-r} (i\,(i-1)\, a_{r+i}, k\,(k-1)\, a_{r+k})$$

$$= \prod_{\substack{i,k=r \\ i\leqq k}}^{n} (a_i, a_k) \cdot (a_r, -1)\, (-1, -1)\, (-1, (n-r)\, a_r^{n-r-1})$$

$$\cdot \prod_{k=2}^{n-r} \prod_{i=2}^{k} (i\,(i-1), a_{r+k})\, (a_{r+i}, k\,(k-1))\ (i\,(i-1), k\,(k-1))$$

$$= \prod_{\substack{i,k=r \\ i\leqq k}}^{n} (a_i, a_k) \cdot (-1, -(n-r)\, a_r^{n-r}) \cdot \prod_{k=2}^{n-r} (k, a_{r+k})\, (a_{r+2} \ldots a_{r+k}, k\,(k-1))$$

$$(k, k\,(k-1)).$$

---

[1]) Der $k = 2$ entsprechende Faktor des letzten Produkts ist natürlich $(1, u_1)\,(a_2, u_2) = (a_2, u_2)$. wie aus der Entstehungsweise sofort klar ist.

Nun ist wegen $k \cdot 1^2 - 1 \cdot 1^2 = k - 1$ offenbar $(k(k-1), k) = +1$ (*HI*, Satz 5, S. 135). Damit wird:

$$\bar{c}_p(f_2) = \prod_{\substack{i,k=r \\ i \leqq k}}^{n} (a_i, a_k) \cdot (-1, -(n-r)\, a_r^{n-r})\, (a_r, 1 \cdot 2 \cdots (n-r)) \cdot \prod_{k=2}^{n-r} (a_r^{k-1}, k(k-1)).$$

Der letzte Faktor ist

$$\prod_{k=2}^{n-r} (a_r, k)\, (a_r^k, k)\, (a_r^{k-1}, k-1) = (a_r, 1 \cdot 2 \cdots n - r)\, (a_r^{n-r}, n-r)$$

und somit:

$$\bar{c}_p(f_2) = \prod_{\substack{i,k=r \\ i \leqq k}}^{n} (a_i, a_k) \cdot (-1, -(n-r)\, a_r^{n-r})\, (a_r^{n-r}, n-r)$$

$$= \prod_{\substack{i,k=r \\ i \leqq k}}^{n} (a_i, a_k) \cdot (-1, -(n-r))\, (a_r^{n-r}, -(n-r)).$$

$$\bar{c}_p(f_2) = \prod_{\substack{i,k=r \\ i \leqq k}}^{n} (a_i, a_k) \cdot (-a_r^{n-r}, -(n-r)), \tag{18.}$$

was, wie man sofort bestätigt, auch für $r = n - 1$ stimmt (siehe S. 214 oben).

Schließlich wird für $2 < r < n - 1$:

$$(d(f_1), d(f_2)) = (a_2 \ldots a_{r-1}\, u_{r-1}, -a_r \ldots a_n\, (n-r))$$
$$= (-(n-r)\, a_1 \ldots a_{r-1}, -(n-r)\, a_r \ldots a_n)$$

$$(d(f_1), d(f_2)) = (a_1 \ldots a_{r-1}, a_r \ldots a_n) \cdot (-(n-r), -a_1 \ldots a_{r-1}\, a_r^{n-r+1}), \tag{19.}$$

was ebenfalls auch für $r = 2$ und $r = n - 1$ stimmt.

Aus (17.), (18.), (19.) folgt nach (12.) für $2 \leqq r \leqq n - 1$:

$$\bar{c}_p(f_0) = \prod_{\substack{i,k=1 \\ i \leqq k}}^{n} (a_i, a_k) \cdot (-(n-r), -a_2 \ldots a_{r-1})\, (-(n-r), -a_r^{n-r})$$
$$(-(n-r), -a_1 \ldots a_{r-1}\, a_r^{n-r+1})$$
$$= \bar{c}_p(f) \cdot (-(n-r), -a_1\, a_r) = \bar{c}_p(f) \cdot (-(n-r), +(n-r)) = \bar{c}_p(f),$$

womit der Satz nunmehr vollständig bewiesen ist.

Für alle zu einer beliebigen, (auch nicht reinen) Form f in $K(p)$ äquivalenten reinen Formen $f^{(i)}$ hat also die Einheit $\bar{c}_p(f^{(i)})$ denselben Wert, den man daher auch mit $\bar{c}_p(f)$ bezeichnen kann. *Dieses $\bar{c}_p(f)$ ist somit eine Invariante gegen p-adische Transformation von f.*

An Stelle von $\bar{c}_p$ verwende ich im folgenden die ebenfalls invariante Einheit

$$c_p = \left(\frac{-1, -1}{p}\right) \bar{c}_p = \begin{cases} +\bar{c}_p & \text{für ungerades } p, \\ -\bar{c}_p & \text{für } p = 2 \text{ und } p_\infty. \end{cases}$$

Dann folgt aus (4.), (5.), (6.) S. 8:

$$\text{für } n = 1 : c_p = \left(\frac{-d_p, -1}{p}\right), \tag{20.}$$

$$\text{„ } n = 2 : c_p = \left(\frac{-d_p, -1}{p}\right) \check{c}_p, \tag{21.}$$

$$\text{„ } n = 3 : c_p = \hat{c}_p, \tag{22.}$$

wo $\check{c}_p$ und $\hat{c}_p$ die Invarianten aus *HI* für binäre und ternäre Formen sind, während

allgemein für eine reine Form $f_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ die Invariante c_p nach der Regel

$$c_p = \left(\frac{-1, -1}{p}\right) \prod_{\substack{i,k=1 \\ i \leq k}}^{n} \left(\frac{a_i, a_k}{p}\right) \tag{23.}$$

zu bilden ist. Analog (12.) folgt für eine zerfallende Form $f = \varphi + \psi$ allgemein:

$$c_p(f) = c_p(\varphi)\, c_p(\psi) \left(\frac{-1, -1}{p}\right) \left(\frac{d(\varphi), d(\psi)}{p}\right). \tag{24.}$$

§ 2. Die vollständigen Invariantensysteme gegen p-adische und rationale Transformation.

Ich kann jetzt leicht nachweisen, daß für endliches p das System n, d_p, c_p ein vollständiges Invariantensystem gegen p-adische Transformation ist.

Satz 2: *Quadratische Formen sind für endliches p dann und nur dann in $K(p)$ äquivalent, wenn ihre Invarianten n, d_p, c_p übereinstimmen.*

Beweis: Es ist nur noch das „dann" des Satzes zu beweisen. Stimmen f und f' in den Invarianten $n\ (>1)$, d_p, c_p überein, so stellen nach *HI*, Satz 5 (S. 135), 12 (S. 141), 20 (S. 146) (unter Berücksichtigung von (21.), (22.)) beide Formen genau dieselben Zahlen, also sicher irgendeine von Null verschiedene Zahl a_1 in $K(p)$ dar. Sie lassen sich dann p-adisch in zwei Formen

$$f_0 = a_1 x_1^2 + \varphi(x_2, \ldots, x_n);\ f_0' = a_1 x_1^2 + \varphi'(x_2, \ldots, x_n) \tag{25.}$$

transformieren. Wegen $d_p(f_0) = d_p(f_0')$ ist auch $d_p(\varphi) = d_p(\varphi')$ und daher nach (24.): $c_p(\varphi) = c_p(\varphi')$. Nimmt man also die Gültigkeit des Satzes für $n-1$ an, so sind die beiden $(n-1)$-ären Formen φ und φ' in $K(p)$ äquivalent und somit auch f_0 und f_0', also f und f'. Da der Satz für $n = 1$ selbstverständlich ist, folgt seine Allgemeingültigkeit durch Induktion.

Für $K(p_\infty)$ ist das System $n, d_{p_\infty}, c_{p_\infty}$ im allgemeinen kein vollständiges Invariantensystem, sondern wird es erst bei Hinzunahme des Trägheitsindex J. Es gilt hier:

Satz 3: *Quadratische Formen sind dann und nur dann in $K(p_\infty)$ äquivalent, wenn ihre Invarianten n, J übereinstimmen.*

Beweis: J ist nach dem *Sylvester*schen Trägheitsgesetz invariant gegen p_∞-adische (reelle) Transformation. Umgekehrt sind zwei in den Invarianten n, J übereinstimmende Formen in $K(p_\infty)$ äquivalent, da sie ein- und derselben reinen Form

$$f_0 = \sum_{i=1}^{J} (-x_i^2) + \sum_{i=J+1}^{n} x_i^2 \tag{26.}$$

in $K(p_\infty)$ äquivalent sind.

Die Invarianten d_{p_∞}, c_{p_∞} haben keine selbständige Bedeutung. Sie sind durch die Invariante J vollständig bestimmt; denn aus (26.) und (23.) folgt sofort:

$$d_{p_\infty} = (-1)^J;\ c_{p_\infty} = (-1)^{\frac{J(J+1)}{2}+1}.$$

Aus den beiden letzten Sätzen 2 und 3 ergibt sich, daß das auf alle Stellen p erstreckte System $n, (d_p), J, (c_p)$ oder das ihm gleichbedeutende $n, d, J, (c_p)$ gegen rationale Transformation invariant ist. Dieses System ist nun auch das gesuchte vollständige Invariantensystem gegen rationale Transformation:

Satz 4: *Quadratische Formen sind dann und nur dann in $K(1)$ äquivalent, wenn ihre Invarianten $n, d, J, (c_p)$ übereinstimmen.*

Beweis: Zwei in diesen Invarianten übereinstimmende Formen stellen nach *HI*, *S.* 147 (Tabelle 1) genau dieselben Zahlen, also sicher ein rationales $a_1 \neq 0$ in $K(1)$ dar. Man kann sie dann wieder in zwei Formen der Gestalt (25.) rational transformieren, und es folgt ebenso wie im Beweis zu Satz 2:

$$d(\varphi) = d(\varphi'),\ c_p(\varphi) \equiv c_p(\varphi') \text{ und natürlich auch } J(\varphi) = J(\varphi').$$

Da der Satz für $n = 1$ selbstverständlich ist, folgt seine Allgemeingültigkeit wie oben durch Induktion.

Satz 2, 3, 4 enthalten das in der Einleitung S. 208 genannte Prinzip (II.).

Die gefundenen Resultate, insbesondere der alles zusammenfassende Satz 4, waren unter der Voraussetzung hergeleitet, daß die Diskriminante der betrachteten Formen von Null verschieden ist, gelten jedoch, wie ich noch kurz zeigen will, wörtlich ebenso, wenn man auch Formen mit der Diskriminante Null zuläßt. Da sich nämlich jede solche Form von N Variablen, deren Koeffizientensystem den Rang n ($\leqq N$) hat, durch eine umkehrbare Substitution in eine Form von nur n wirklich auftretenden Variablen transformieren läßt, die bei dieser Variablenzahl eine von Null verschiedene Diskriminante hat, bleiben alle Resultate bestehen, wenn nur an die Stelle der bisherigen *Variablenzahl* n als allgemeine Invariante der gegen beliebige umkehrbare Substitutionen invariante *Rang* n des Koeffizientensystems gesetzt wird. Dies soll von jetzt an geschehen, und die Invariante n nur der einzigen Beschränkung $n \geqq 1$ unterworfen, d. h. von dem trivialen Fall $n = 0$, wo alle Koeffizienten verschwinden, ein- für allemal abgesehen werden.

§ 3. Die Komplexe rational-äquivalenter Formen.

Alle in $K(1)$ äquivalenten Formen fasse ich in einen *Komplex* [1]) zusammen. Jeder Komplex hat dann ein eindeutig bestimmtes Invariantensystem $n, d, J, (c_p)$ und umgekehrt kann zu irgendeinem solchen Invariantensystem auch höchstens ein Formenkomplex gehören. Damit einem beliebig gegebenen Invariantensystem $n, d, J, (c_p)$ wirklich ein Komplex quadratischer Formen entspricht, müssen zwischen den Invarianten gewisse Bedingungen erfüllt sein, die ich jetzt aufstellen will.

Es bestehen zunächst folgende Abhängigkeiten zwischen den Invarianten $n, d, J, (c_p)$:

$$0 \leqq J \leqq n, \tag{27.}$$

$$d_{p_\infty} = (-1)^J, \tag{28.}$$

$$c_{p_\infty} = (-1)^{\frac{J(J+1)}{2}+1}, \tag{29.}$$

[1]) Ich ändere die von Herrn *Hensel* in Kap. XII, § 8 angenommene Bezeichnung „Geschlechter" in „Komplexe" um, da, wie ich in der Einleitung (S. 207) ausgeführt habe, die in der bisherigen Literatur sogenannten Geschlechter den spezielleren rationalen Substitutionen der Determinante 1 mit zur Diskriminante der Formen primem Generalnenner entsprechen, also eine weiter differenzierte Einleitung der quadratischen Formen bewirken, als meine Komplexe, die für $n = 2$ offenbar genau dasselbe sind, wie die von Herrn *Hensel* a. a. O. sogenannten Geschlechter.

$$(30.) \qquad \prod_p c_p = +1.$$

(27.) ist ohne weiteres klar, (28.) und (29.) sind auf S. 217 u. hergeleitet, (30.) ergibt sich sofort aus dem Produktsatz für das *Hilbert*sche Symbol.

Ferner ist nach (20.) und (21.) S. 216:

$$(31.) \qquad \text{für } n = 1\text{: } c_p \equiv \left(\frac{-d, -1}{p}\right)$$

$$(32.) \qquad \text{„ } n = 2\text{: } c_p \equiv \left(\frac{-d, -1}{p}\right) \check{c}_p.$$

Setzt man $d_{p_\infty} = (-1)^\delta$; $c_{p_\infty} = (-1)^\gamma$, so folgt aus (28.) und (29.):

$$(33.) \qquad J \equiv 2(\gamma + 1) - \delta^2 \mod 4.$$

Unter Berücksichtigung von (27.) ergibt sich daraus:

Satz 5: *Für $n = 1, 2, 3$ ist die Invariante J durch d_{p_∞} und c_{p_∞}, d. h. durch die Invarianten d und (c_p) vollständig bestimmt.*

Danach wird also die Einführung einer besonderen Invariante J erst für $n > 3$ erforderlich (vgl. *HI*, S 147, Tabellen 1 und 2). Für $n = 1, 2, 3$ sind stets alle auf J bezüglichen Forderungen von selbst erfüllt, wenn alle an d und (c_p) zu stellenden erfüllt sind.

Ferner ergeben sich aus (27.)—(32.) die folgenden drei Sätze für die Spezialfälle $n = 1, 2, 3$:

Satz 6: *Für $n = 1$ ist d die einzige, unabhängige Invariante, und zu ihr gehört der Komplex aller zu $f = dx^2$ äquivalenten Form $f_a = d\alpha^2 \cdot x^2$.*

Satz 7: *Für $n = 2$ existiert dann und nur dann ein Komplex mit vorgeschriebenen Invarianten d, (c_p), wenn außer dem Produktsatz (30.) noch die Bedingung*

$$(34.) \qquad c_p = +1 \text{ für } \left(\frac{-d}{p}\right) = +1 \text{ [1]}$$

besteht.

Beweis: Es ist stets (vgl. *HI*, S. 138, Gl. (13.)): $\check{c}_p = +1$ für $\left(\frac{-d}{p}\right) = +1$. Daraus ergibt sich nach (32.) auch:

$$c_p = \left(\frac{-d, -1}{p}\right) = +1 \text{ für } \left(\frac{-d}{p}\right) = +1.$$

(34.) ist also notwendige Bedingung für die Existenz eines binären Komplexes mit den Invarianten d, (c_p).

Seien umgekehrt (30.) und (34.) erfüllt. Dann weise ich die Existenz eines rationalen $m \neq 0$ nach, sodaß die binäre Form

$$(35.) \qquad f = m(x_1^2 + d\,x_2^2)$$

der Invariante d auch das gegebene Invariantensystem (c_p) hat. Die Invarianten $c_p(f)$ bestimmen sich nach (23.) aus

$$c_p \equiv \left(\frac{-1, -1}{p}\right)\left(\frac{m, m}{p}\right)\left(\frac{m, md}{p}\right)\left(\frac{md, md}{p}\right) \equiv \left(\frac{-m, -d}{p}\right).$$

Ich habe also m so zu wählen, daß

$$(36.) \qquad \left(\frac{-m, -d}{p}\right) \equiv c_p$$

---

[1]) Siehe *HI*, S. 134, Anm. 1.

wird. Aus dem Erfülltsein von (34.) folgt [1]), daß die Beziehung (36) für jedes einzelne p sicher durch einen p-adischen Kern m_p lösbar ist. Bezeichnet dann p_i jede der (wegen (30.) endlich vielen) Primzahlen, für die

$$\begin{aligned} &\text{entweder} \quad c_{p_i} = -1 \\ &\text{oder} \quad\quad c_{p_i} = +1 \text{ aber } p_i \text{ in } d \text{ enthalten} \end{aligned}$$

ist, so kann man, wörtlich ebenso wie in *HI*, *S.* 142/43, ein rationales

$$m = (-1)^{\delta}\, 2^{\alpha}\, \Pi p_i^{a_i}\, P; \quad \text{(} P \text{ positive, von 2, } p_i \text{ verschiedene Primzahl)}$$

finden, das sich von m_2, m_{p_∞} und den m_{p_i} nur um Quadratzahlen der betr. $K(p)$ unterscheidet, also für $p = 2$, p_∞, p_i der Bedingung (36.) genügt. Für alle übrigen Primzahlen p außer P ist $c_p = +1$ und m und d nicht durch p teilbar, sodaß (36.) von selbst erfüllt ist. Daher muß nach (30.) und dem Produktsatz für das *Hilbert*sche Symbol das angegebene m auch für $p = P$ und somit für alle p der Bedingung (36.) genügen. Daher hat die mit diesem m gebildete Form (35.) die vorgeschriebenen Invarianten d und (c_p), w. z. b. w. [2]).

Satz 8: *Für $n = 3$ existiert dann und nur dann ein Komplex mit vorgeschriebenen Invarianten d, (c_p), wenn die Beziehung* (30.) *besteht.*

Beweis: Die ternäre Form $f = x_1^2 + \varphi(x_2, x_3)$ hat offenbar dieselben Invarianten d, (c_p) wie die binäre Form φ. Denn es ist $d(f) = d(\varphi)$ und daher nach (24.):

$$c_p(f) \equiv \left(\frac{-1, -1}{p}\right) c_p(\varphi) \left(\frac{-1, -1}{p}\right)\left(\frac{1, d(\varphi)}{p}\right) \equiv c_p(\varphi).$$

Ich bestimme nun zunächst eine Zahl $\bar{d}$ so, daß für sie und (c_p) die Bedingung (34.) besteht, d. h. daß

$$\left(\frac{-\bar{d}}{p}\right) \neq +1 \text{ für } c_p \neq +1$$

ist. Da wegen (30.) c_p nur für endlich viele $p = p_i$ von $+1$ verschieden sein kann, läßt sich ein solches $\bar{d}$ stets finden, etwa als das positive Produkt aller endlichen p_i. Dann existiert nach dem vorigen Satz eine binäre Form $\bar{\varphi}$ und also eine ternäre Form $f = x_1^2 + \bar{\varphi}(x_2, x_3)$ mit den Invarianten $\bar{d}$, (c_p). Da schließlich (c_p) invariant gegen Multiplikation ist (*HI*, S. 135 oben), hat die ternäre Form $f = d\,\bar{d} \cdot \bar{f}$ die vorgeschriebenen Invarianten d, (c_p).

Allgemein beweise ich:

Satz 9: *Zu einem vorgeschriebenen Invariantensystem $n, d, J, (c_p)$ existiert dann und nur dann ein (und nur ein) Komplex quadratischer Formen, wenn die Bedingungen*

$$(37.) \qquad \begin{cases} 0 \leqq J \leqq n, \\ d_{p_\infty} = (-1)^J, \\ c_{p_\infty} = (-1)^{\frac{J(J+1)}{2}+1}, \\ \Pi_p\, c_p = +1 \end{cases}$$

---

[1]) Siehe Kap. XII, § 7, S. 328 unten.

[2]) Dieser Beweis ist eine Verallgemeinerung des in Kap. XII, § 8 dargestellten Beweises für die Existenz der primitiven binären Geschlechter. Mein Beweis ist von der Beschränkung auf „primitive Gesamtcharaktere" frei.

und außerdem

(37 a.) *für* $n = 1$: $c_p \equiv \left(\frac{-d, -1}{p}\right)$,

(37 b.) *für* $n = 2$: $c_p = +1$ *für* $\left(\frac{-d}{p}\right) = +1$

bestehen.

Beweis: Für $n = 1, 2, 3$ gilt nach den Sätzen 6—8 dieses § unter Berücksichtigung von Satz 5 (S. 219) der Satz auch in dieser Fassung.

Für $n > 3$ setze ich:
$f = x_1^2 + \varphi(x_2, \ldots, x_n)$, falls $0 \leqq J < n$ bezw. $f = -x_1^2 + \varphi(x_2, \ldots, x_n)$, falls $J = n$. Dann bestehen, wie man mittels (24.) (S. 217) leicht bestätigt, zwischen den Invarianten d, J, (c_p) von f und d', J', (c_p') von φ die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} d' &= d, \\ J' &= J, \\ c_p' &\equiv c_p, \end{aligned}\right\} \text{ bezw. } \begin{cases} d' = -d\ , \\ J' = J - 1, \\ c_p' = c_p\left(\frac{d, -1}{p}\right). \end{cases}$$

Im ersten Falle folgt aus dem Bestehen von (37.) für $n, d, J, (c_p)$ auch das Bestehen dieser Bedingungen für das Invariantensystem $n-1, d', J', (c_p')$ von φ. Im zweiten Falle wird, wenn (37.) für $n, d, J, (c_p)$ besteht,

$$J' = n - 1,$$

$$d'_{p_\infty} = -d_{p_\infty} = (-1)^{n-1} = (-1)^{J'},$$

$$c'_{p_\infty} = c_{p_\infty}\left(\frac{d_{p_\infty}, -1}{p}\right) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+1} \cdot (-1)^n = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}+1} = (-1)^{\frac{J'(J'+1)}{2}+1},$$

$$\prod_p c_p' = \prod_p c_p\left(\frac{d, -1}{p}\right) = +1,$$

sodaß hier ebenfalls die Invarianten $n-1$, d', J', (c_p') von φ den Bedingungen (37.) genügen. Nimmt man also den Satz für $n-1$ als bewiesen an, so existiert eine $(n-1)$-äre Form φ mit den Invarianten $d', J', (c_p')$, also auch eine n-äre Form $f = \pm x_1^2 + \varphi(x_2, \ldots, x_n)$ mit den Invarianten $d, J, (c_p)$. Wegen der Gültigkeit des Satzes für $n = 1, 2, 3$ folgt somit seine Allgemeingültigkeit durch Induktion.

§ 4. Die *Minkowski*schen Invarianten C_p.

Zwischen den in der Einleitung genannten Einheiten C_p des *Minkowski*schen vollständigen Invariantensystems und den in dieser Arbeit eingeführten c_p muß, wie schon erwähnt, eine umkehrbar eindeutige Beziehung bestehen, die ich jetzt noch herleiten will.

Minkowski gibt für seine Invarianten C_p einer Form F folgende Berechnungsregel [1]):

Ist f eine zu F in $K(1)$ äquivalente Form der besonderen Eigenschaft:

$$f \equiv a_1 x_1^2 + \cdots + a_{n-m} x_{n-m}^2 + p\, a_{n-m+1} x_{n-m+1}^2 + \cdots + p\, a_n x_n^2$$

mod. p^2 bezw. mod. 2^4, wo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zu p prim sind, — solche Formen f lassen

[1]) Ges. Abh. I, S. 235 u. 237, Gl. (8.), (9.).

sich aus den *Minkowski*schen Hauptresten zu jeder Form F leicht bilden —, so ist für ungerades p:

$$C_p(F) = C_p(f) = \left(\frac{(-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]} a_{n-m+1} \cdots a_n}{p}\right),$$

für $p = 2$:

$$C_2(F) = C_2(f) = (-1)^{\left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]\left\{\left[\frac{n}{2}\right] + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - 1}{2}\right\} + \sum_{\substack{i,k=1 \\ i<k}}^{n} \frac{a_i - 1}{2} \cdot \frac{a_k - 1}{2}} \left(\frac{2}{a_{n-m+1} \cdots a_n}\right).$$

In *Hensel*scher Ausdrucksweise kann man für die Formen f zur Berechnung von C_p jede zu F in $K(p)$ äquivalente reine Form setzen, aus deren Koeffizienten negative und höhere Potenzen von p durch Transformation der Variablen entfernt sind. Sei also

$$f_0 = a_1 x_1^2 + \cdots + a_{n-m} x_{n-m}^2 + p\, a_{n-m+1} x_{n-m+1}^2 + \cdots + p\, a_n x_n^2 = \varphi + p\,\psi$$

eine solche. Nach (24.) (S. 217) ist

$$c_p(f_0) \equiv \left(\frac{-1, -1}{p}\right) c_p(\varphi)\, c_p(p\,\psi) \left(\frac{a_1 \ldots a_{n-m},\ p^m\, a_{n-m+1} \ldots a_n}{p}\right)$$

$$\equiv \left(\frac{-1, -1}{p}\right) c_p(\varphi) \left(\frac{p, p}{p}\right)^{\frac{m(m+1)}{2}} \left(\frac{p,\ (a_{n-m+1} \ldots a_n)^{m+1}}{p}\right) c_p(\psi) \left(\frac{a_1 \ldots a_{n-m},\ p^m}{p}\right)$$

$$\left(\frac{a_1 \ldots a_{n-m},\ a_{n-m+1} \ldots a_n}{p}\right)$$

$$\equiv \left(\frac{-1, -1}{p}\right) \prod_{\substack{i,k=1 \\ i \leqq k}}^{n} \left(\frac{a_i, a_k}{p}\right) \cdot \left(\frac{p,\ (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}}{p}\right) \left(\frac{p,\ (a_{n-m+1} \ldots a_n)^{m+1}}{p}\right)$$

$$\left(\frac{p,\ (a_1 \ldots a_{n-m})^m}{p}\right).$$

Ist zunächst p ungerade, so wird, da alle a_i durch p nicht teilbar sind,

$$c_p(f_0) = \left(\frac{(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}}{p}\right) \left(\frac{(a_{n-m+1} \ldots a_n)^{m+1}}{p}\right) \left(\frac{(a_1 \ldots a_{n-m})^m}{p}\right)$$

$$= \left(\frac{(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} (a_1 \ldots a_n)^m}{p}\right) \left(\frac{a_{n-m+1} \ldots a_n}{p}\right).$$

Es ist somit nach obigem:

$$C_p\, c_p = \left(\frac{(-1^{\left[\frac{m}{2}\right] - \frac{m(m+1)}{2}}}{p}\right) \left(\frac{a_1 \ldots a_n}{p}\right)^m,$$

also wegen $\left[\frac{m}{2}\right] - \frac{m(m+1)}{2} \equiv m \bmod 2$:

$$C_p\, c_p = \left(\frac{-a_1 \ldots a_n}{p}\right)^m.$$

Ist nun $d_p = p^\alpha w_p^\beta$ der p-adische Kern der Diskriminante $p^m a_1 \ldots a_n$ von f_0, so ist:

$$\alpha \equiv m \bmod 2;\ \left(\frac{a_1 \ldots a_n}{p}\right) = (-1)^\beta,$$

also

$$C_p\, c_p = \left(\frac{-1}{p}\right)^{\alpha} \cdot (-1)^{\alpha\beta},$$

$$C_p = c_p\, (-1)^{\left(\frac{p-1}{2}+\beta\right)\alpha}. \tag{38.}$$

Dies ist die gesuchte, umkehrbare eindeutige Beziehung zwischen C_p und c_p. Sie hängt nur von der Invariante d ab. C_p und c_p können sich überhaupt nur für $\alpha = 1$, d. h. für die Teiler von d unterscheiden.

Für $p = 2$ folgt in Fortsetzung obiger Rechnung:

$$c_2(f_0) = (-1)^{1 + \sum\limits_{\substack{i,k=1\\ i\leq k}}^{n} \frac{a_i-1}{2}\cdot\frac{a_k-1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{a_{n-m+1}\dots a_n}\right)^{m+1} \cdot \left(\frac{2}{a_1\dots a_{n-m}}\right)^{m}$$

$$= (-1)^{1 + \sum\limits_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{n} \frac{a_i-1}{2}\cdot\frac{a_k-1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k-1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{a_1\dots a_n}\right)^{m} \cdot \left(\frac{2}{a_{n-m+1}\dots a_n}\right).$$

Damit wird

$$C_2\, c_2 = (-1)^{\left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]\left\{\left[\frac{n}{2}\right] + \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k-1}{2}\right\} + 1 + \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k-1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{a_1\dots a_n}\right)^{m}$$

$$= (-1)^{1 + \left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \left\{\left[\frac{n}{2}\right]+1\right\}\cdot\frac{a_1\dots a_n - 1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{a_1\dots a_n}\right)^{m}.$$

Ist nun wieder $d_2 = 2^{\alpha}\,(-1)^{\beta}\,5^{\gamma}$ der dyadische Kern der Diskriminante $2^n\, a_1 \dots a_n$, so ist:

$$a \equiv m \bmod 2;\ (-1)^{\frac{a_1\dots a_n - 1}{2}} = (-1)^{\beta};\ (-1)^{\frac{(a_1\dots a_n)^2-1}{8}} = (-1)^{\gamma},$$

also

$$C_2 = c_2 \cdot (-1)^{1 + \left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \left\{\left[\frac{n}{2}\right]+1\right\}\beta + \alpha\gamma}. \tag{39.}$$

Dies ist wiederum eine umkehrbare eindeutige Beziehung zwischen C_2 und c_2, die nur von den Invarianten n und d abhängt.

Es fällt nicht schwer, aus den Beziehungen (38.) und (39.) und der für meine c_p bestehenden einfachen Produktbedingung $\prod\limits_p c_p = +1$ die *Minkowski*sche Produktbedingung [1])

$$\prod_p C_p = (-1)^{\left[\frac{n-2J-2k}{4}\right] + \left[\frac{n-2J-2k}{2}\right]}$$

herzuleiten, in der k die Anzahl der in d aufgehenden Primzahlen der Form $4l+3$ bezeichnet.

Ich gehe zum Schluß noch kurz auf die Beziehung der Invarianten $c_p(f)$ zu den in der Einleitung genannten Einheiten $\hat{c}_p(\psi)$ ein, die aus einer zu f in $K(1)$

[1]) Ges. Abh. I, S. 232, Gl. (7.).

äquivalenten Form f_0 der Gestalt (1.) (S. 206) gewonnen werden. Sind die Vorzeichen in g ein- für allemal fest gewählt, und ist dabei J' der den dort angegebenen Bedingungen

$$J' \leqq J; \quad n-3-J' \leqq n-J,$$

d. h. der Bedingung

$$0 \leqq J-J' \leqq 3 \tag{40.}$$

genügende Trägheitsindex von g, so ist $d(\psi) = (-1)^{J'} d(f_0) = (-1)^{J'} d(f) = (-1)^{J'} d$. Dann ist nach (24.) und (22.) (S. 216/17):

$$c_p(f) \equiv c_p(f_0) \equiv c_p(g)\, c_p(\psi) \left(\frac{-1,-1}{p}\right)\left(\frac{d(g), d(\psi)}{p}\right)$$

$$\equiv \left(\frac{-1,-1}{p}\right)^{\frac{J'(J'+1)}{2}} \hat{c}_p(\psi) \left(\frac{(-1)^{J'}, (-1)^{J'} d}{p}\right),$$

$$c_p(f) = \hat{c}_p(\psi) \cdot \left(\frac{-1,-1}{p}\right)^{\frac{J'(J'-1)}{2}} \left(\frac{d,-1}{p}\right)^{J'}. \tag{41.}$$

Für jedes der Bedingung (40.) genügende, fest gewählte J' besteht dann die umkehrbar eindeutige Beziehung (41.) zwischen $(c_p(f))$ und $(\hat{c}_p(\psi))$, sodaß auch die Invarianten $\hat{c}_p(\psi)$ an Stelle der $c_p(f)$ in das vollständige Invariantensystem treten können. Damit ist die in der Einleitung auf S. 206 offen gelassene Frage vollständig entschieden.

Über ein neues Normenrestsymbol und seine Anwendung auf die Theorie der Normenreste in allgemeinen algebraischen Körpern.

Von Herrn *Kurt Hensel* in Marburg.

Im Mittelpunkte der modernen Zahlentheorie steht der von Herrn *Hilbert* in die Wissenschaft eingeführte Begriff der Normenreste und Nichtreste. Wie sehr sich mit seiner Hilfe die Darstellung und der Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes für l-te Potenzreste vereinfacht haben, weiß jeder, der die Entwickelung dieser Fragen von ihrer Grundlegung durch *Kummer* an aufmerksam verfolgt hat.

Hilbert hat diesen Begriff nur in den verhältnismäßig einfachen, aber für die bisherigen Anwendungen ausreichenden Fällen eingeführt, daß es sich um relativ quadratische oder um s. g. *Kummer*sche Körper handelt. Herr *Furtwängler* benutzt ihn für allgemeine relativ zyklische Körper vom Primzahlgrade. Nur für solche Körper gelten die einfachen und schönen Eigenschaften der *Hilbert*schen Normenrestsymbole, auf denen dann die Beweise der allgemeinen Reziprozitätsgesetze u. a. m. notwendig beruhen.

Will man aber über diese speziellen Erweiterungskörper hinausgehen und der allgemeinen Theorie der algebraischen Zahlen näher treten, so erkennt man mit Erstaunen, daß hier der *Hilbert*sche Begriff der Normenreste und Nichtreste in der Weise vollständig versagt, daß dann im allgemeinen jede Gesetzmäßigkeit und jede Anwendbarkeit auf allgemeine Fragen aufzuhören scheint.

Dies beruht m. E. auf dem Umstande, daß die *Hilbert*sche Definition der Normenreste und Nichtreste durch eine andere ersetzt werden muß, welche in den bisher stets behandelten speziellen Fällen mit jener übereinstimmt, im allgemeinen aber von ihr völlig verschieden ist. Diese neue Definition soll im folgenden gegeben und der Wert der neuen Normenrestsymbole sowie die wichtigsten für dieselben geltenden Grundgesetze für die allgemeinsten Erweiterungskörper in „fast allen“ Fällen bestimmt werden. Wie diese Ergebnisse dann auch zur Bestimmung des *Hilbert*schen Normenrestsymboles bei beliebigen Erweiterungskörpern benutzt werden können, soll am Schlusse dieser Arbeit gezeigt werden.

§ 1. Das neue Normenrestsymbol $\left\{\frac{\gamma}{\mathfrak{P}}\right\}$ und das verallgemeinerte *Hilbert*sche Symbol $\left\{\frac{\gamma}{\mathfrak{p}}\right\}$.

Es sei k ein beliebiger algebraischer Zahlkörper, $\mathfrak{p}$ ein Primteiler irgendeiner reellen Primzahl p; e und f seien Ordnung und Grad von $\mathfrak{p}$. Ferner sei K ein be-

liebiger Oberkörper von k, und $\mathfrak{P}$ einer der Primteiler von $\mathfrak{p}$ in K; e_0 und f_0 mögen Relativordnung und Relativgrad von $\mathfrak{P}$ in bezug auf k sein, und $\mu_0 = e_0 f_0$ werde der *Gesamtgrad* von $\mathfrak{P}$ in bezug auf k genannt.

Ich bezeichne nun mit $k(\mathfrak{p})$ und $K(\mathfrak{P})$ die (transzendenten) Erweiterungskörper von k und K, welche aus allen und nur den π-adischen bzw. π_0-adischen Zahlen bestehen, wenn π und π_0 je eine zu $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{P}$ gehörige Primzahl aus k und aus K bedeutet. Dann ist $K(\mathfrak{P})$ ein algebraischer Erweiterungskörper von $k(\mathfrak{p})$ vom Grade $\mu_0 = e_0 f_0$ über $k(\mathfrak{p})$. Jede Zahl γ_0 des ersten Körpers genügt nämlich für den Bereich von $\mathfrak{P}$ einer Hauptgleichung des μ_0-ten Grades.

(1.) $$f(x, \mathfrak{p}) = x^{\mu_0} - \gamma_1 x^{\mu_0 - 1} + \gamma_2 x^{\mu_0 - 2} - \cdots \pm \gamma_{\mu_0} = n_{\mathfrak{P}}(x - \gamma_0) = 0 \ (\mathfrak{P})$$

mit Koeffizienten aus $k(\mathfrak{p})$, deren linke Seite in diesem Körper irreduzibel oder die Potenz einer irreduziblen Funktion ist, je nachdem γ_0 ein primitives oder nicht primitives Element von $K(\mathfrak{P})$ ist. Unter $n_{\mathfrak{P}}(x - \gamma_0)$ ist hier, wie stets im folgenden die *Relativ*norm des Elementes $x - \gamma_0$ von $K(\mathfrak{P})$ in bezug auf den Unterkörper, $k(\mathfrak{p})$ zu verstehen.

(A.) Ich nenne nun eine Zahl γ von $k(\mathfrak{p})$ einen *Normenrest* oder eine *Normzahl zum Primteiler* $\mathfrak{P}$, wenn $\gamma = n(\gamma_0)$ der Relativnorm einer Zahl γ_0 von $K(\mathfrak{P})$ für den Bereich von $\mathfrak{P}$ gleich ist; im anderen Falle heißt γ ein *Normennichtrest* oder eine *Nichtnormzahl.*

Da der algebraische Körper k ein (transzendenter) Unterkörper von $k(\mathfrak{p})$ ist, so sind durch diese Definition auch alle algebraischen Zahlen γ von k als Normreste oder Nichtreste zu $\mathfrak{P}$ charakterisiert.

Ich will das Symbol $\left\{\frac{\gamma}{\mathfrak{P}}\right\} = 1$ oder $\neq 1$ setzen, je nachdem γ Normenrest oder Nichtrest ist. Die genauere Bestimmung desselben im zweiten Falle werde ich in einer späteren Arbeit geben. Ist der Gesamtgrad μ_0 von $\mathfrak{P}$ gleich 1, fällt also der Körper $K(\mathfrak{P})$ mit $k(\mathfrak{p})$ zusammen, so ist jede Zahl γ des Unterkörpers Normzahl in bezug auf $\mathfrak{P}$; in diesem Falle ist also stets $\left\{\frac{\gamma}{\mathfrak{P}}\right\} = 1$.

Die Definition des Normenrestsymboles, welche *Hilbert - Furtwängler* in den speziellen Fällen relativ-zyklischer Körper vom Primzahlgrad gegeben haben, kann nun auf allgemeine Relativkörper erweitert und auf die folgenden Betrachtungen gegründet werden.

Es seien $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ alle verschiedenen Primteiler des Bereiches K, welche im Primteiler $\mathfrak{p}$ von k enthalten sind. Dann bilden alle Zahlen des Bereiches K einen Teilkörper des Zahlenringes $R(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r) = R(\mathfrak{P}_i)$ aller π_0-adischen Zahlen, wo π_0 eine Zahl aus K bedeutet, welche durch jeden Primteiler $\mathfrak{P}_i$ ein einziges Mal teilbar ist. Jede Zahl γ_0 von $R(\mathfrak{P}_i)$ läßt sich dann nämlich für den Bereich von $\mathfrak{p}$ eindeutig nach ganzen Potenzen von π_0 mit ganzen Koeffizienten in K entwickeln. Da K selbst einen Teilkörper jenes Ringes bildet, so gilt für jede Zahl γ_0 dieses Oberkörpers dasselbe.

Es seien nun speziell

(2.) $$1_1, 1_2, \ldots, 1_r$$

r solche immer auffindbare Zahlen des Ringes, daß für sie die Gleichungen:

(2ª.) $\qquad 1_i = 1 \quad (\mathfrak{P}_i), \quad 1_i = 0 \quad (\mathfrak{P}_k) \quad (k \neq i)$

erfüllt sind. Dann bestehen für sie von selbst die Gleichungen:

(2ᵇ.) $\qquad 1_i^2 = 1_i \quad (\mathfrak{p}), \quad 1_i 1_k = 0 \quad (\mathfrak{p}) \quad (k \neq i),$

und jede Zahl γ_0 von $R(\mathfrak{P}_i)$ ist eindeutig in der Form darstellbar:

(2ᶜ.) $\quad \gamma_0 = \gamma_0 \cdot 1_1 + \gamma_0 \cdot 1_2 + \cdots + \gamma_0 \cdot 1_r = \gamma_0^{(1)} \cdot 1_1 + \cdots + \gamma_0^{(r)} \cdot 1_r,$

wo $\gamma_0^{(1)}, \ldots, \gamma_0^{(r)}$ die Werte von γ_0 für die Bereiche von $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r$ sind. Sind umgekehrt $\bar{\gamma}_0^{(1)}, \ldots, \bar{\gamma}_0^{(r)}$ r beliebige Zahlen der Körper $K(\mathfrak{P}_1), \ldots, K(\mathfrak{P}_r)$, so kann man stets Zahlen $\gamma_0^{(1)}, \ldots, \gamma_0^{(r)}$ des Ringes $R(\mathfrak{P}_i)$ finden, welche für die entsprechenden Stellen $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r$ bezw. gleich $\bar{\gamma}_0^{(1)}, \ldots, \bar{\gamma}_0^{(r)}$ sind, und dann ist $\gamma_0 = \gamma_0^{(1)} \cdot 1_1 + \cdots + \gamma_0^{(r)} \cdot 1_r$ diejenige Zahl von $R(\mathfrak{P}_i)$, welche für die Bereiche von $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r$ bezw. die willkürlich angenommenen Werte $\bar{\gamma}_0^{(1)}, \ldots, \bar{\gamma}_0^{(r)}$ besitzt.

Es sei nun allgemein e_i die Ordnung, f_i der Grad und $\mu_i = e_i f_i$ der Hauptgrad des Primteilers $\mathfrak{P}_i$ in bezug auf $\mathfrak{p}$. Dann genügt jedes Element γ_0 von $R(\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r)$ einer Hauptgleichung des Grades $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r$ innerhalb $k(\mathfrak{p})$:

(3.) $\qquad F(x, \mathfrak{p}) = n_{\mathfrak{p}}(x - \gamma_0) = n_{\mathfrak{P}_1}(x - \gamma_0) \cdots n_{\mathfrak{P}_r}(x - \gamma_0) \quad (\mathfrak{p}),$

deren linke Seite sich für den Bereich von $\mathfrak{p}$ in r Faktoren zerlegt, welche gleich Null gesetzt die Hauptgleichungen desselben Elementes γ_0 für die Bereiche von $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ ergeben. Hieraus folgt für $x = 0$ speziell die Gleichung

(3ª.) $\qquad n_{\mathfrak{p}}(\gamma_0) = n_{\mathfrak{P}_1}(\gamma_0)\, n_{\mathfrak{P}_2}(\gamma_0) \ldots n_{\mathfrak{P}_r}(\gamma_0) \quad (\mathfrak{p}).$

Nach *Hilbert* würde nun ein Element γ von $k(\mathfrak{p})$ dann und nur dann Normzahl in bezug auf den Primteiler $\mathfrak{p}$ von k sein, wenn ein Element γ_0 in $R(\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r)$ existiert, für welches:

(4.) $\qquad \gamma = n_{\mathfrak{p}}(\gamma_0) \quad (\mathfrak{p}),$

ist, wenn also γ die Norm eines Elementes γ_0 des Oberringes $R(\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r)$ ist. Aus der vorhergehenden Gleichung folgt hiernach unmittelbar der Satz:

(B.) Eine Zahl γ von $k(\mathfrak{p})$ ist dann und nur dann Normzahl zu $\mathfrak{p}$, wenn sie auf irgendeine Weise in ein Produkt $\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_r$ von r Faktoren so zerlegt werden kann, daß allgemein γ_i Normzahl zu $\mathfrak{P}_i$ ist.

Ist nämlich $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_r$ so zerlegt, daß $\gamma_i = n_{\mathfrak{P}_i}(\gamma_0^{(i)})$ ist, und ist $\gamma_0 = \gamma_0^{(1)} \cdot 1_1 + \cdots + \gamma_0^{(r)} \cdot 1_r$, so ist ja nach (3ª.) $\gamma = n_{\mathfrak{P}_1}(\gamma_0) \ldots n_{\mathfrak{P}_r}(\gamma_0) = n_{\mathfrak{p}}(\gamma_0)$; und ist umgekehrt $\gamma = n_{\mathfrak{p}}(\gamma_0) = n_{\mathfrak{P}_1}(\gamma_0) \ldots n_{\mathfrak{P}_r}(\gamma^0) = \gamma_1 \ldots \gamma_r$, so zerlegt sich γ in der im Satze (B.) verlangten Weise.

Wir wollen nun ein zweites Symbol $\left\{\frac{\gamma}{\mathfrak{p}}\right\}$ gleich 1 oder $\neq 1$ annehmen, je nachdem γ für den Bereich von $\mathfrak{p}$ Normzahl ist oder nicht; dieses Symbol wollen wir kurz als das *Hilbert*sche Normenrestsymbol bezeichnen. Enthält $\mathfrak{p}$ nur einen einzigen Primteiler $\mathfrak{P}$ ein oder mehrere Male, so ist also immer γ dann und nur dann Normenrest zu $\mathfrak{p}$, wenn es Normenrest zu $\mathfrak{P}$ ist. In diesem Falle, der bei den Untersuchungen *Hilbert*s und *Furtwängler*s fast ausschließlich vorliegt, kann und soll also stets:

(5.) $\qquad \left\{\frac{\gamma}{\mathfrak{p}}\right\} = \left\{\frac{\gamma}{\mathfrak{P}}\right\}$

gesetzt werden. Enthält dagegen $\mathfrak{p}$ auch nur einen Primteiler, etwa $\mathfrak{P}_1$ vom Gesamtgrade $\mu_1 = 1$, so ist für jede Zahl γ von $k(\mathfrak{p})$

$$(5^a.) \qquad \left\{\frac{\gamma}{\mathfrak{p}}\right\} = +1;$$

denn unter dieser Voraussetzung ist ja in bezug auf $\mathfrak{P}_1$ jede Zahl γ Normzahl, und daher liefert die Darstellung $\gamma = \gamma \cdot 1 \ldots 1$ eine Zerlegung von γ, bei welcher jeder einzelne Faktor Normzahl für den zugehörigen Primteiler ist.

Auch dann ist $\left\{\frac{\gamma}{\mathfrak{p}}\right\} = +1$, wenn γ auch nur für einen Primteiler, etwa $\mathfrak{P}_1$ von $\mathfrak{p}$ Normzahl ist, denn auch dann lehrt die Zerlegung $\gamma = \gamma \cdot 1 \ldots 1$ die Richtigkeit unserer Behauptung. Es kann aber auch $\left\{\frac{\gamma}{\mathfrak{p}}\right\} = +1$ sein, wenn γ für keinen Primfaktor $\mathfrak{P}_i$ Normzahl ist; denn es braucht ja nur für eine geeignet gewählte Zerlegung $\gamma = \gamma_1 \ldots \gamma_r$ allgemein γ_i Normzahl für $\mathfrak{P}_i$ zu sein.

§ 2. Bestimmung des neuen Normenrestsymboles in drei Fällen.

Ich wende mich nun zuerst zu einer genaueren Untersuchung des Symboles $\left\{\frac{\gamma}{\mathfrak{P}}\right\}$ für einen Primteiler $\mathfrak{P}$ vom Grade f_0 der Ordnung e_0 und dem Hauptgrade $\mu_0 = e_0 f_0$. Die hier gefundenen Resultate sollen dann zur Bestimmung des Symboles $\left\{\frac{\gamma}{\mathfrak{p}}\right\}$ benutzt werden.

Zunächst ist klar, daß die μ_0-te Potenz $\alpha^{\mu_0} = n_{\mathfrak{P}}(\alpha)$ einer beliebigen Zahl α von $k(\mathfrak{p})$ stets eine Normzahl ist. Ferner ist das Produkt und der Quotient zweier Normzahlen $\gamma = n_{\mathfrak{P}}(\gamma_0)$ und $\delta = n_{\mathfrak{P}}(\delta_0)$ offenbar wieder eine solche, da $\gamma\delta = n_{\mathfrak{P}}(\gamma_0\delta_0)$, $\frac{\gamma}{\delta} = n_{\mathfrak{P}}\left(\frac{\gamma_0}{\delta_0}\right)$ ist. Ebenso leicht erkennt man, daß das Produkt und der Quotient aus einer Normzahl und einer Nichtnormzahl stets eine Nichtnormzahl ist. Ist endlich γ eine beliebige Zahl von $k(\mathfrak{p})$ und γ^h eine Potenz von γ, deren Exponent h zu μ_0 teilerfremd ist, so sind γ und γ^h stets zugleich Normzahlen oder Nichtnormzahlen. Ist nämlich γ Normzahl, so gilt ja das gleiche für γ^h. Ist dagegen γ Nichtnormzahl, so seien h' und μ_0' so gewählt, daß $hh' + \mu_0\mu_0' = 1$ ist. Wäre dann γ^h Normzahl, so gälte das gleiche auch für

$$\gamma^{hh'} = \gamma^{1-\mu_0\mu_0'} = \frac{\gamma}{n(\gamma^{\mu_0'})},$$

d. h. für γ selbst im Widerspruch mit der über γ gemachten Annahme.

Ich behandle in dieser Arbeit zunächst den Hauptfall

daß $\mu_0 = e_0 f_0$ zu $p(p^f - 1)$ teilerfremd ist.

Ist π eine zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primzahl und ist w eine primitive $(p^f - 1)$-te Einheitswurzel in $k(\mathfrak{p})$, so kann jedes Element γ von $k(\mathfrak{p})$ eindeutig in einer der Formen:

$$(6.) \qquad \gamma = \pi^a w^b \eta = \pi^a \varepsilon$$

dargestellt werden, wo $\eta = 1 + e_1\pi + \cdots$ eine s. g. Einseinheit und $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1\pi + \cdots$ eine beliebige Einheit dieses Bereiches bedeutet. Sind entsprechend π_0 und w_0 je eine Primzahl und eine primitive $(p'^{\mu_0} - 1)$-te Einheitswurzel von $K(\mathfrak{P})$, so gilt für jedes Element γ_0 dieses Bereiches eine eindeutige Darstellung

$$(6^a.) \qquad \gamma_0 = \pi_0^{a_0} w_0^{b_0} \eta_0 = \pi^{a_0} \varepsilon_0,$$

wo η_0 eine Einseinheit und ε_0 eine beliebige Einheit von $K(\mathfrak{P})$ bedeutet.

Unter der hier gemachten Voraussetzung gelten nun die folgenden drei Sätze, durch welche in diesem Falle die Frage nach den Normenresten und Nichtresten in bezug auf $\mathfrak{P}$ vollständig beantwortet wird:

(I.) Jede Einseinheit η von $k(\mathfrak{p})$ ist Normzahl für $\mathfrak{P}$.

In der Tat ist ja η durch ein Fundamentalsystem $(\eta_1, \ldots \eta_\varkappa)$ von Einseinheiten eindeutig in der Form:

$$\eta = \eta_1^{d_1} \ldots \eta_\varkappa^{d_\varkappa} \tag{7.}$$

darstellbar, wo $d_1, \ldots, d_\varkappa$ ganze p-adische Zahlen sind. Da nun n. d. V. μ_0 eine p-adische Einheit ist, so kann man η wirklich in der Form:

$$\eta = (\eta_1^{\bar{d}_1} \ldots \eta_\varkappa^{\bar{d}_\varkappa})^{\mu_0} = \bar{\eta}^{\mu_0} = n_{\mathfrak{P}}(\bar{\eta}) \tag{7a.}$$

schreiben, wo die Exponenten $\bar{d}_i = \dfrac{d_i}{\mu_0}$ ebenfalls ganze p-adische Zahlen sind; damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Hieraus folgt auch, daß in diesem Falle jede Einseinheit $\eta = \bar{\eta}_i^{e_0 f_0} = (\bar{\eta}_i^{e_0})^{f_0}$ die f_0-te Potenz einer anderen Einseinheit ist.

(II.) Jede $(p^f - 1)$-te Einheitswurzel von $k(\mathfrak{p})$ ist Normzahl und zwar gleich der Norm einer $(p^{ff_0} - 1)$-ten Einheitswurzel von $K(\mathfrak{P})$.

Ist nämlich w_0 irgendeine primitive $(p^{ff_0} - 1)$-te Einheitswurzel aus $K(\mathfrak{P})$, so sind ihre $e_0 f_0$ Konjugierten gleich der e_0 Male genommenen Reihe der Potenzen $(w_0, w_0^{p^f}, w_0^{p^{2f}}, \ldots w_0^{p^{(f_0-1)f}})$. Also besteht für $n_{\mathfrak{P}}(w_0)$ die Gleichung

$$n_{\mathfrak{P}}(w_0) = (w_0^{1+p^f+\cdots+p^{(f_0-1)f}})^{e_0} = \left(w_0^{\frac{p^{ff_0}-1}{p^f-1}}\right)^{e_0} = \bar{w}^{e_0} = w. \tag{8.}$$

Hier ist

$$\bar{w} = w_0^{\frac{p^{ff_0}-1}{p^f-1}} \tag{8a.}$$

eine primitive $(p^f - 1)$-te Einheitswurzel aus $k(\mathfrak{p})$; denn erstens ist ja $\bar{w}^{p^f-1} = w_0^{p^{ff_0}-1} = 1$, und zweitens ist für keinen Teiler d von $(p^f - 1)$

$$\bar{w}^{\frac{p^f-1}{d}} = w_0^{\frac{p^{ff_0}-1}{d}} = 1,$$

weil ja w_0 n. d. V. eine primitive $(p^{ff_0} - 1)$-te Einheitswurzel ist. Da endlich n. d. V. $(e_0, p^f - 1) = 1$ ist, so ist auch $\bar{w}^{e_0} = w$ eine *primitive* $(p^f - 1)$-te Einheitswurzel aus $k(\mathfrak{p})$.

Aus der Gleichung (8.) ergibt sich also für jeden Exponenten b

$$w^b = n(w_0^b) \tag{8b.}$$

und damit der Beweis unserer Behauptung.

Ist speziell w_0^b primitiv in $K(\mathfrak{P})$, also $(b, p^{ff_0} - 1) = 1$ so ist auch w_b primitiv in $k(\mathfrak{p})$, weil ja dann von selbst auch $(b, p^f - 1) = 1$ ist.

Aus (I.) und (II.) ergibt sich unmittelbar der Satz:

(II^a.) Jede beliebige Einheit $\varepsilon = w^b \eta$ von $k(\mathfrak{p})$ ist in diesem Falle eine Normzahl für $\mathfrak{P}$.

Denn es ist ja $\varepsilon = w^b \eta = n(w_0^b \bar{\eta}) = n(\varepsilon_0)$.

(III.) Die f_0-te Potenz jeder Primzahl π von $k(\mathfrak{p})$ ist Normzahl für $\mathfrak{P}$.

Ist nämlich $\overline{\pi}_0$ irgendeine Primzahl aus $K(\mathfrak{P})$, so ist ja $n_{\mathfrak{p}}(\overline{\pi}_0) \sim \pi^{f_0}$, d. h. es ist

$$n_{\mathfrak{p}}(\overline{\pi}_0) = \pi^{f_0} \varepsilon = \pi^{f_0} n_{\mathfrak{p}}(\varepsilon_0),$$

also wirklich:

$$\pi^{f_0} = n\left(\frac{\overline{\pi}_0}{\varepsilon_0}\right) = n(\pi_0), \tag{9.}$$

wo $\pi_0 = \dfrac{\overline{\pi}_0}{\varepsilon_0}$ eine bestimmte neue Primzahl aus $K(\mathfrak{P})$ ist.

Aus diesen drei Hilfssätzen folgt nun unmittelbar der allgemeine Satz:

(C.) Eine beliebige Zahl $\gamma = \pi^a \varepsilon$ des Körpers $k(\mathfrak{p})$ ist stets und nur dann Normzahl zu $\mathfrak{P}$, wenn ihre Ordnungszahl a ein Vielfaches des Grades f_0 von $\mathfrak{P}$ ist.

Soll nämlich $\gamma = \pi^a \varepsilon$ die Norm einer Zahl $\gamma_0 = \pi_0^{a_0} \varepsilon_0$ sein, so muß $n(\gamma_0) = \pi^{a_0 f_0} n(\varepsilon_0) = \pi^a \varepsilon$ also $a = a_0 f_0$ sein. Ist das der Fall, so ist auch wirklich:

$$\gamma = \pi^{a_0 f_0} \varepsilon = n(\pi_0^{a_0} \varepsilon_0),$$

und damit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

In ganz gleicher Weise kann nun der nach einer Richtung hin allgemeinere Fall behandelt werden:

daß die Ordnung e_0 von $\mathfrak{P}$ gleich Eins ist, während sein Grad f_0 ganz beliebig gegeben sein kann.

Hierdurch wird also die Frage der Normzahlen und Nichtnormzahlen für alle Primteiler $\mathfrak{P}$ mit Ausnahme der Teiler der Relativdiskriminanten von K in bezug auf k entschieden, welche letzteren ja nur in endlicher Anzahl vorhanden sind.

Auch in diesem Falle gelten nämlich, wie jetzt gezeigt werden soll die oben bewiesenen drei Hilfssätze (I.), (II.), (III.), nämlich die Sätze:

(I′.) Jede Einseinheit η von $k(\mathfrak{p})$ ist Normzahl zu $\mathfrak{P}$, nämlich gleich der Norm $n_{\mathfrak{P}}(\eta_0)$ einer Einseinheit η_0 des Körpers $K(\mathfrak{P})$.

(II′.) Jede $(p^f - 1)$-te Einheitswurzel w von $k(\mathfrak{p})$ ist Normzahl zu $\mathfrak{P}$, nämlich gleich der Norm $n_{\mathfrak{P}}(w_0)$ einer $(p^{f_0} - 1)$-ten Einheitswurzel w_0 aus $K(\mathfrak{P})$. Ist w_0 primitiv in $K(\mathfrak{P})$, so ist auch w primitiv in $k(\mathfrak{p})$.

(III′.) Die f_0-te Potenz π^{f_0} einer beliebigen Primzahl von $k(\mathfrak{p})$ ist Normzahl zu $\mathfrak{P}$.

Mit ihrer Hilfe ergibt sich also genau wie vorher auch in diesem Falle der Satz:

(C′.) Eine beliebige Zahl $\gamma = \pi^a \varepsilon$ von $k(\mathfrak{p})$ ist stets und nur dann Normzahl zu $\mathfrak{P}$, wenn ihre Ordnungszahl a ein Vielfaches des Grades f_0 von $\mathfrak{P}$ ist.

Nur der erste von diesen drei Hilfssätzen erfordert hier einen neuen Beweis. Um zu zeigen, daß jede Einseinheit

$$\eta = \eta_k = 1 - \omega_k \pi^k + \cdots$$

von einer beliebigen k-ten Ordnung Normzahl ist, weise ich nur nach, daß man in der speziellen Einseinheit k-ter Ordnung von $K(\mathfrak{P})$:

$$\eta_k^{(0)} = 1 - \omega_0 \pi^k$$

die $(p^{f_0} - 1)$-te Einheitswurzel ω_0 stets so wählen kann, daß $\eta_k \sim n_{\mathfrak{p}}(\eta_k^{(0)})$ wird, daß also beide Einseinheiten dasselbe Hauptglied $\omega_k \pi^k$ enthalten. Ist das nämlich gezeigt, so wird der Quotient

$$\frac{\eta_k}{n(\eta_k^{(0)})} = \eta_{k+1} = 1 - \omega_{k+1} \pi^{k+1} + \cdots$$

eine Einseinheit mindestens von der Ordnung $k+1$, zu der man nach demselben Satze eine Einheit $\eta_{k+1}^{(0)}$ aus $K(\mathfrak{P})$ so bestimmen kann, daß $\eta_{k+1} \sim n(\eta_{k+1}^{(0)})$, daß also $\eta_{k+2} = \dfrac{\eta_k}{n(\eta_k^{(0)}\,\eta_{k+1}^{(0)})}$ mindestens von der $(k+2)$-ten Ordnung wird, und durch unbegrenzte Fortsetzung dieses Verfahrens ergibt sich wirklich $\eta = \eta_k = n(\eta_k^{(0)}\,\eta_{k+1}^{(0)}\dots)$ als Normzahl.

Um nun diesen Satz für eine bestimmte Ordnungszahl k zu beweisen, beachte ich, daß dann und nur dann

$$n(\eta_k^{(0)}) = n(1-\omega_0\,\pi^k) = 1-(\omega_0+\omega_0^{p^f}+\cdots+\omega_0^{p^{(f_0-1)f}})\,\pi^k+\cdots \sim 1-\omega_k\,\pi^k+\cdots$$

ist, wenn ω_0 so bestimmt werden kann, daß

$$s_{\mathfrak{P}}(\omega_0) \equiv \omega_k \pmod{\mathfrak{P}} \tag{10.}$$

wird, wo $s_{\mathfrak{P}}(\omega_0) = \omega_0+\omega_0^{p^f}+\cdots+\omega_0^{p^{(f_0-1)f}}$ die Spur von ω_0 in bezug auf $\mathfrak{P}$ bedeutet. Diese Kongruenz besitzt aber, wie auch ω_k als (p^f-1)-te Einheitswurzel gegeben sei, stets soviele verschiedene Wurzeln, als ihr Grad angibt, also mindestens eine. Bezeichnet man nämlich die ganze Funktion des $p^{(f_0-1)f}$-ten Grades in ω_0: $s(\omega_0)-\omega_k$ kurz durch $F(\omega_0)$, so zeigt man leicht, daß sie modulo $\mathfrak{P}$ betrachtet ein Teiler von $\omega_0^{p^{f_0 f}}-\omega_0$ ist und somit wie diese modulo $\mathfrak{P}$ in lauter Linearfaktoren zerfällt. In der Tat ist ja, da $\omega_k^{p^f}-\omega_k$ durch $\mathfrak{P}$ teilbar ist,

$$F(\omega_0)^{p^f}-F(\omega_0) = F(\omega_0)\,G(\omega_0) \equiv s(\omega_0)^{p^f}-s(\omega_0) \equiv \omega_0^{p^{f f_0}}-\omega_0 \pmod{\mathfrak{P}}, \tag{11.}$$

und damit ist unsere Behauptung, also auch der Hilfssatz (I'.) bewiesen.

Der Beweis des Hilfssatzes (II'.) ergibt sich sofort aus dem von (II.), wenn man dort $e_0 = 1$ setzt, und die beiden Sätze (III.) und (III'.) sind identisch. Hiermit ist also der allgemeine Satz (C'.) als richtig erwiesen.

Drittens betrachte ich noch den Fall,

daß wieder $\mu_0 = e_0 f_0$ p nicht enthält, daß aber nur f_0 zu (p^f-1) teilerfremd ist, während e_0 eine beliebige Einheit modulo p sein kann.

In diesem Falle gilt der folgende allgemeine Satz:

(D.) Wird die Primzahl π in $k(\mathfrak{p})$ geeignet ausgewählt, so ist eine Zahl $\gamma = \pi^a\,w^b\,\eta$ dann und nur dann Normzahl für $\mathfrak{P}$, wenn ihre Ordnungszahl a durch f_0 und ihr Index b durch den größten gemeinsamen Teiler $d_0 = (e_0, p^f-1)$ von e_0 und p^f-1 teilbar ist.

In diesem Falle gelten nämlich die folgenden drei Hilfssätze, aus denen das Theorem (D.) unmittelbar folgt:

(I''.) Jede Einseinheit $\eta = \bar{\eta}^{\mu_0} = n(\bar{\eta})$ in $k(\mathfrak{p})$ ist die μ_0-te Potenz einer Einseinheit $\bar{\eta}$ desselben Körpers, also Normzahl. Hieraus folgt sofort wieder, daß jede solche Einseinheit auch die f_0-te Potenz einer anderen ist.

(II''.) Die e_0-te Potenz jeder (p^f-1)-ten Einheitswurzel in $k(\mathfrak{p})$ ist Normzahl.

(III''.) Die f_0-te Potenz einer geeignet ausgewählten Primzahl aus $k(\mathfrak{p})$ ist Normzahl.

Der erste Hilfssatz (I''.) stimmt mit (I.) überein, bedarf also keines Beweises. Der Beweis der zweiten folgt unmittelbar aus den Gleichungen (8.) und (8ª.). Um auch den dritten Hilfssatz einfach zu beweisen beachten wir, daß für zwei beliebige Primzahlen π_0 und $\bar{\pi}$ aus $K(\mathfrak{P})$ und $k(\mathfrak{p})$ wieder $n_{\mathfrak{P}}(\pi_0) \sim \bar{\pi}^{f_0}$, daß also

(12.) $$n(\pi_0) = \bar{\pi}^{f_0} w^{g_0} \eta$$

ist, wo nach dem Zusatz zu (I''.) $\eta = \bar{\eta}^{f_0}$ gesetzt werden kann. Da ferner n. d. V. $(f_0, p^f - 1) = 1$ ist, so kann f_0' und p' so gewählt werden, daß $1 = f_0 f_0' + (p^f - 1)p'$, daß also $w = w^{f_0 f_0'}$ gesetzt werden kann. Hiernach kann (12.) in der Form geschrieben werden:

(12ª.) $$n(\pi_0) = (\bar{\pi}\, w^{f_0' g_0}\, \bar{\eta})^{f_0} = \pi^{f_0},$$

wenn an Stelle von $\bar{\pi}$ die neue Primzahl $\pi = \bar{\pi}\, w^{f_0' g_0}\, \bar{\eta}$ eingeführt wird; und damit ist auch der dritte Hilfssatz bewiesen.

Wählt man nun als Primzahl in $k(\mathfrak{p})$ diese Zahl π, so ergibt sich für sie leicht die Richtigkeit des Satzes (D.). Soll nämlich

(13.) $$\gamma = \pi^a w^b \eta = n(\gamma_0) = n(\pi_0^{a_0} w_0^{b_0} \eta_0) = \pi^{a_0 f_0} w^{b_0 e_0} \bar{\eta}$$

eine Normzahl sein, so muß wegen der Eindeutigkeit dieser multiplikativen Darstellung

(13ª.) $a = a_0 f_0$, $b \equiv b_0 e_0 \pmod{p^f - 1}$, d. h. $b = b_0 e_0 + (p^f - 1)\, p_0$

sein, d. h. a ist ein Multiplum von f_0, b ein solches von $d_0 = (e_0, p^f - 1)$. Sind umgekehrt diese beiden Bedingungen erfüllt, also $a = a_0 f_0$ und b in der Form $b_0 e_0 + (p^f - 1)\, p_0$ darstellbar, so ist

(13ᵇ.) $$\gamma = \pi^{a_0 f_0} w^{b_0 e_0} \bar{\eta}^{\mu^0} = n(\pi_0^{a_0} w_0^{b_0} \bar{\eta}) = n_{\mathfrak{P}}(\gamma_0)$$

wirklich eine Normzahl; und damit ist der Satz (D.) in seinem vollen Umfange bewiesen.

Ist $\bar{\pi}$ eine beliebige Primzahl aus $k(\mathfrak{p})$, welche mit der ausgezeichneten π durch die Gleichung

$$\bar{\pi} = \pi w^c \eta$$

zusammenhängen möge, so ist eine beliebige Zahl

$$\gamma = \bar{\pi}^{\bar{a}} w^{\bar{b}} \bar{\eta} = \pi^{\bar{a}} w^{\bar{b} + \bar{a}c} \eta'$$

dann und nur dann Normzahl, wenn erstens ihre Ordnungszahl $\bar{a}$ durch f_0 teilbar ist, und zweitens zwischen Ordnungszahl und Index die lineare Kongruenz

$$\bar{a}c + \bar{b} \equiv 0 \pmod{(e_0, p^f - 1)}$$

besteht, deren Koeffizient c durch die Forderung bestimmt ist, daß $(\bar{\pi}\, w^{-c})^{f_0}$ Normzahl ist.

§ 3. Bestimmung des verallgemeinerten *Hilbert*schen Normenrestsymboles in drei Fällen.

Mit Hilfe der bisher gewonnenen Ergebnisse über die Normenreste für einen Primteiler $\mathfrak{P}$ des Oberkörpers $K(\mathfrak{P})$ kann nun die Frage nach den Normenresten und Nichtresten auch für einen Primteiler $\mathfrak{p}$ des Unterkörpers k unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Zerlegung von $\mathfrak{p}$ im Oberkörper K vollständig beantwortet werden.

Es sei

(14.) $$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \mathfrak{P}_2^{e_2} \dots \mathfrak{P}_r^{e_r}$$

die Zerlegung von $\mathfrak{p}$ in K, und es werden allgemein durch e_i, f_i und $\mu_i = e_i f_i$ die Ordnungen, die Grade und die Hauptgrade des einzelnen Primteiler $\mathfrak{P}_i$ in bezug auf k bezeichnet. Ist n der Relativgrad von K, so ist also:

(14$_a$.) $n = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r = e_1 f_1 + e_2 f_2 + \cdots + e_r f_r$.

Ich nehme nun zuerst an,

daß für jeden von diesen Primteilern $\mathfrak{P}_i$ entweder der zugehörige Hauptgrad μ_i zu $p\,(p^f - 1)$ teilerfremd ist, oder daß sein Relativgrad f_i beliebig, seine Relativordnung e_i aber gleich 1 ist.

Dann gilt der bemerkenswert einfache Satz:

(E.) Eine Zahl $\gamma = \pi^a \varepsilon$ von k ist dann und nur dann Normenrest zu $\mathfrak{p}$, wenn ihre Ordnungszahl a durch den größten gemeinsamen Teiler $\bar{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_r)$ aller Gradzahlen f_i teilbar ist.

Nach dem Satze (B.) ist nämlich γ dann und nur dann Normenrest zu $\mathfrak{p}$, wenn $\gamma = \pi^a \varepsilon$ eine solche Zerlegung in r Faktoren $\gamma_i = \pi^{a_i} \varepsilon_i$ zuläßt, daß für sie allgemein $\left\{\frac{\gamma_i}{\mathfrak{P}_i}\right\} = +1$ ist, daß also jede Ordnungszahl $a_i = a_i^{(0)} f_i$ durch f_i teilbar ist. Stets und nur dann ist also γ Normzahl zu $\mathfrak{p}$, wenn für ihre Ordnungszahl a eine additive Zerlegung:

(15.) $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_r = a_1^{(0)} f_1 + a_2^{(0)} f_2 + \cdots + a_r^{(0)} f_r$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_i^{(0)}$ besteht, und da diese Forderung dann und nur dann erfüllt ist, wenn a durch $\bar{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_r)$ teilbar ist, so ist der obige Satz in seinem ganzen Umfang bewiesen.

Der wichtigste Fall, um den es sich in der Theorie der Normenreste handelt, ist der, daß der Oberkörper K ein *Galois*scher Körper über k ist, daß also alle n zu K in bezug auf k konjugierten Körper gleich K sind. In diesem Falle zerlegt sich $\mathfrak{p}$ in lauter konjugierte Primteiler $\mathfrak{P}_i$ von gleicher Ordnung e_0 und von gleichem Grade f_0, so daß

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{P}_1\, \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_r)^{e_0}$$

wird. Hier ist also $e_0 f_0 r = n$, und alle Primteiler haben denselben Hauptgrad $\mu_0 = e_0 f_0$.

Ist ferner $\pi_1^{(0)}$ irgendeine Primzahl in K für $\mathfrak{P}_1$, so sind ihre konjugierten $\pi_2^{(0)}, \ldots, \pi_r^{(0)}$ Primzahlen für $\mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$. Ist eine Zahl γ von k Normzahl für $\mathfrak{P}_1$, ist also $\gamma = n_{\mathfrak{P}_1}(\gamma_1^{(0)})$, so gilt für dasselbe γ auch $\gamma = n_{\mathfrak{P}_2}(\gamma_2^{(0)}), \ldots, \gamma = n_{\mathfrak{P}_r}(\gamma_r^{(0)})$, d. h. γ ist auch Normzahl für $\mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$. Ist dagegen γ Nichtnormzahl für $\mathfrak{P}_1$, so ist es auch Nichtnormzahl für $\mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$.

Es sei nun unter dieser Voraussetzung wieder

entweder $\mu_0 = e_0 f_0$ zu $p\,(p^f - 1)$ teilerfremd, oder es sei $e_0 = 1$, f_0 beliebig.

Dann ist nach (C.) und (C′.) eine Zahl $\gamma = \pi^a \varepsilon$ dann und nur dann Normzahl zu einem dieser Primteiler $\mathfrak{P}_i$, wenn ihre Ordnungszahl a durch f_0 teilbar ist. Aus dem soeben bewiesenen Satze (E.) geht aber hervor, daß dasselbe γ stets und nur dann Normzahl zu $\mathfrak{p}$ ist, wenn a durch den größten gemeinsamen Teiler $\bar{f} = (f_0, f_0, \ldots, f_0)$, d. h. ebenfalls durch f_0 teilbar ist. In diesem Falle besteht also der Satz:

(F.) Unter einer der beiden soeben gemachten Voraussetzungen ist für einen *Galois*schen Relativkörper K eine Zahl γ von k dann und nur dann Normzahl zu $\mathfrak{p}$, wenn sie Normzahl zu einem der Primteiler $\mathfrak{P}_i$ ist, und

zwar ist dies stets und nur dann der Fall, wenn ihre Ordnungszahl durch den Relativgrad f_0 der Primteiler $\mathfrak{P}_i$ teilbar ist.

Es sei nun zweitens:

$\mu_0 = e_0 f_0$ durch p nicht teilbar und f_0 zu $(p^f - 1)$ teilerfremd, e_0 beliebig. Ist dann die Primzahl π innerhalb $k(\mathfrak{p})$ so gewählt, daß $\pi'^{0} = n_{\mathfrak{P}_1}(\pi_1^{(0)})$ Normzahl für $\mathfrak{P}_1$ ist, was nach (III''.) stets möglich ist, so ist für dieselbe Primzahl $\pi'^{0} = n_{\mathfrak{P}_2}(\pi_2^{(0)})$, Normzahl für $\mathfrak{P}_2$ und dasselbe gilt für $\mathfrak{P}_3, \ldots, \mathfrak{P}_r$. Nach dem Satze (D.) ist dann eine Zahl $\gamma = \pi^a w^b \eta$ dann und nur dann Normzahl für jeden einzelnen Primteiler $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r$ wenn ihre Ordnungszahl a durch f_0, ihr Index b durch $(e_0, p^f - 1)$ teilbar ist.

Andererseits ist aber γ dann und nur dann Normzahl zu $\mathfrak{p}$, wenn γ eine solche Zerlegung $\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_r$ zuläßt, daß allgemein die Ordnungszahl von γ_i durch f_0, ihr Index durch $(e_0, p^f - 1)$ teilbar ist, und diese Forderung ist offenbar stets und nur dann erfüllt, wenn a und b selbst diese Teiler enthalten. Es ergibt sich also der Satz:

(G.) Unter der soeben gemachten Voraussetzung ist für einen *Galois*schen Relativkörper K eine Zahl γ dann und nur dann Normzahl zu $\mathfrak{p}$, wenn sie Normzahl zu einem seiner Primteiler in K ist, und zwar ist dies für eine Zahl $\gamma = \pi^a w^b \eta$ bei geeigneter Auswahl der Primzahl π stets und nur dann der Fall, wenn ihre Ordnungszahl a durch f_0, ihr Index durch $(e_0, p^f - 1)$ teilbar ist.

Klassenanzahlen bei linearen Substitutionen.

Von Herrn *H. Brandt* in Aachen.

Die linearen Substitutionen mit ganzzahligen Koeffizienten und der gleichen, nicht verschwindenden Determinante lassen sich nach verschiedenen Äquivalenzprinzipien in Klassen einteilen, von denen wir hier, an Bekanntes anknüpfend, vier durch Definitionen näher bezeichnen [1]).

1. Zwei Substitutionen S und T heißen äquivalent oder gehören zu derselben Elementarklasse, in Zeichen $S \sim T$, wenn es zwei Unimodulare [2]) U und V gibt, so daß $T = U S V$.

2. Zwei Substitutionen S und T heißen links äquivalent oder gehören zu derselben Linksklasse, in Zeichen $S \dot{\sim} T$, wenn es eine Unimodulare U gibt, so daß $T = U S$.

3. Zwei Substitutionen S und T heißen rechts äquivalent oder gehören zu derselben Rechtsklasse, in Zeichen $S \dot{\sim} T$, wenn es eine Unimodulare V gibt, so daß $T = S V$.

4. Zwei Substitutionen S und T heißen doppelt äquivalent oder gehören zu derselben Doppelklasse [3]), in Zeichen $S \ddot{\sim} T$, wenn es zwei Unimodulare U und V gibt, so daß $T = U S = S V$.

Die bei gegebener Ordnung der Substitutionen und gegebenem Wert der Determinante entstehenden vier Klassenzahlen sind bekannt. Die erste ergibt sich aus Betrachtungen, die *Cayley* [4]) angestellt hat, die zweite und die ihr gleiche dritte wurde von *Eisenstein* [5]) durch Abzählung der reduzierten Substitutionen gewonnen, die vierte ist das Quadrat dieser Anzahl.

Was den Zusammenhang der verschiedenen Klasseneinteilungen anbetrifft, so geben die zweite und die dritte zwei voneinander unabhängige Unterteilungen der

---

[1]) Vgl. hierzu *Brandt*, Zur Komposition der binären und quadratischen Formen relativ einer Grundform, I. Kapitel, dieses Journal Bd. 150 (1919) S. 6—16.

[2]) D. h. lineare Substitutionen mit der Determinante $+1$.

[3]) Früher von mir als Schar bezeichnet, a. a. O.

[4]) *Cayley*, Recherches sur les matrices dont les termes sont des fonctions linéaires d'une seule indéterminée, dieses Journal Bd. 50 (1855) S. 315, Papers t. 2. p. 204, vgl. auch *Frobenius*, dieses Journal Bd. 86 (1879) S. 169 und Enzyklopädie I, S. 592.

[5]) *Eisenstein*, Über die Vergleichung von solchen ternären quadratischen Formen, welche verschiedene Determinanten haben. Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1852, S. 355, vgl. auch Enzyklopädie I, S. 589 (Druckfehler!).

ersten, und die letzte stellt gerade die gleichsam durch Überkreuzung der beiden vorigen gewonnene weitere Unterteilung vor. Im folgenden sollen die bei diesen Unterteilungen entstehenden Anzahlen ermittelt werden, wobei wir uns zur Vereinfachung der Ausdrucksweise auf Substitutionen mit positiver Determinante beschränken dürfen, weil für die mit negativer Determinante ganz Entsprechendes gilt.

Eine Elementarklasse wird nach *H. Smith* und *Frobenius* durch n voneinander unabhängige Zahlen, ihre Invarianten, vollständig charakterisiert. Das sind die Zahlen

$$i_0 = d_1,\ i_1 = \frac{d_2}{d_1^2},\quad i_\sigma = \frac{d_{\sigma+1}\cdot d_{\sigma-1}}{d_\sigma^2}\ (\sigma = 2, 3, \ldots, n-1),\ \text{wobei } d_\sigma\ (\sigma = 1, 2, \ldots, n)$$

den größten gemeinsamen Teiler der Determinanten σ-ter Ordnung bedeutet. Die Anzahl der Rechtsklassen, die auf die Elementarklasse mit den Invarianten $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}$ fallen, kann dann, weil sie offenbar von i_0 unabhängig ist, durch $\nu(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1})$ bezeichnet werden.

Es genügt, diese Funktion für den Fall zu ermitteln, daß in den Invarianten i_σ $(\sigma = 1, 2, \ldots, n-1)$ nur eine einzige Primzahl p aufgeht. Sind nämlich $p^{\pi_\sigma}, q^{\varkappa_\sigma} \ldots$ die höchsten in i_σ aufgehenden Potenzen der verschiedenen in der Determinante überhaupt enthaltenen Primzahlen $p, q, \ldots$, so ist die gesuchte Anzahl gleich dem Produkt der Anzahlen $\nu(p^{\pi_1}, \ldots, p^{\pi_{n-1}}),\ \nu(q^{\varkappa_1}, \ldots, q^{\varkappa_{n-1}}), \ldots$

Um $\nu(p^{\pi_1}, \ldots, p^{\pi_{n-1}})$ zu bestimmen, bezeichnen wir durch P die Matrix der Elementarteiler der Substitutionen mit den Invarianten $i_0 = 1, i_\sigma = p^{\pi_\sigma}$ $(\sigma = 1, 2, \ldots, n-1)$, d. h. die Matrix, die in der Hauptdiagonale der Reihe nach die Elemente

$$1, p^{\pi_1}, p^{\pi_1+\pi_2}, \ldots, p^{\pi_1+\pi_2+\cdots+\pi_{n-1}},$$

sonst aber lauter Nullen enthält. Sind dann unter den $n-1$ Exponenten π_σ $(\sigma = 1, 2, \ldots, n-1)$ der Reihe nach die $\lambda - 1$ den Indexwerten $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\lambda-1}$ entsprechenden von Null verschieden, während die übrigen etwa noch vorhandenen verschwinden und setzt man noch $\sigma_0 = 0,\ \sigma_\lambda = n$, so daß sich λ Zahlen $\varkappa_\iota$ durch die Bedingungen

$$\varkappa_\iota = \sigma_\iota - \sigma_{\iota-1} \qquad (\iota = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

bestimmen lassen, so sind in der Matrix P die ersten $\varkappa_1$ Elemente gleich 1, die folgenden $\varkappa_2$ Elemente $p^{\pi_{\sigma_1}}$, die dann folgenden $\varkappa_3$ Elemente $p^{\pi_{\sigma_1}+\pi_{\sigma_2}}$ usw. und schließlich die letzten $\varkappa_\lambda$ Elemente $p^{\pi_{\sigma_1}+\pi_{\sigma_2}+\cdots+\pi_{\sigma_{\lambda-1}}}$.

Wir setzen zur Abkürzung $\pi = \pi_{\sigma_1} + \pi_{\sigma_2} + \cdots + \pi_{\sigma_{\lambda-1}}$ und definieren eine Matrix $\bar{P}$ durch die Gleichung $P\bar{P} = p^\pi \cdot E$, wo E die identische Substitution bedeutet. Durchläuft dann $\mathfrak{U}$ ein vollständiges System nach p^π inkongruenter unimodularer Substitutionen, so gehört $\mathfrak{U}P$ allen mit P zu derselben Elementarklasse gehörigen Rechtsklassen und auch jeder gleich oft an, nämlich so oft wie der Rechtsklasse P, d. h. so oft wie

$$\bar{P}\,\mathfrak{U}\,P \equiv 0,\ (p^\pi).$$

Demnach ergibt sich die gesuchte Anzahl als Quotient aus der Anzahl aller $\mathfrak{U}$ dividiert durch die Anzahl derjenigen von ihnen, welche dieser Kongruenz genügen. Dieser

Quotient bleibt offenbar ungeändert, wenn wir die Forderung $|\mathfrak{U}| = 1$ durch die Forderung $|\mathfrak{U}|$ prim zu p ersetzen. Wenn die Determinante $|\mathfrak{U}|$ prim zu p, wollen wir auch die Substitution $\mathfrak{U}$ prim zu p nennen.

Die Anzahl der nach p^π verschiedenen zu p primen Substitutionen $\mathfrak{U}$ beträgt

$$p^{n^2\pi}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p^n}\right).$$

Um zu erkennen, für welche dieser Substitutionen die Kongruenz

$$P\,\mathfrak{U}\,P \equiv 0, \ (p^\pi)$$

erfüllt ist, teilen wir die Matrix $\mathfrak{U}$ in horizontale und vertikale Parallelstreifen von den Breiten $x_1, x_2, \ldots, x_\lambda$, so daß quadratische und rechteckige Felder entstehen, bei denen wir die Diagonalfelder $\mathfrak{U}_{\iota\iota}$, die Felder unter der Diagonale $\mathfrak{U}_{j\iota}$ und die Felder über der Diagonale $\mathfrak{U}_{\iota j}$ $(\iota, j = 1, 2, \ldots, \lambda;\ \iota < j)$ unterscheiden. Führt man die für die linke Seite der Kongruenz geforderten Zusammensetzungen tatsächlich aus, so erkennt man, daß die Kongruenz für die Elemente des Feldes $\mathfrak{U}_{j\iota}$ die Teilbarkeit durch die Potenz von p mit dem Exponenten $\pi_{\sigma_\iota} + \pi_{\sigma_{\iota+1}} + \cdots + \pi_{\sigma_{j-1}}$ fordert, dagegen für die Diagonalfelder $\mathfrak{U}_{\iota\iota}$ und die Felder über der Diagonale $\mathfrak{U}_{\iota j}$ keinerlei Forderung enthält. Weil aber $|\mathfrak{U}|$ prim zu p, müssen die Diagonalfelder für sich zu p prime Substitutionen sein. Da diese Bedingungen bei einer Substitution nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend dafür sind, daß sie zu den $\mathfrak{U}$ gehört und der Kongruenz genügt, so handelt es sich nur um die Abzählung der diesen Bedingungen genügenden, nach p^π verschiedenen Substitutionen.

Wird für einen Augenblick die Anzahl der Möglichkeiten, das Feld $\mathfrak{U}_{\iota j}$ auszufüllen mit $[\mathfrak{U}_{\iota j}]$ bezeichnet, so hat man

$$\left.\begin{aligned} [\mathfrak{U}_{\iota j}] &= p^{\pi x_\iota x_j}, \\ \left[\mathfrak{U}_{\iota\iota}\right] &= p^{\pi x_\iota x_\iota}\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p^{x_\iota}}\right), \\ \left[\mathfrak{U}_{j\iota}\right] &= p^{(\pi-\pi_{\sigma\iota}-\pi_{\sigma_{\iota-1}}-\cdots-\pi_{\sigma_{j-1}})x_j x_\iota}, \end{aligned}\right\} \quad \iota, j = 1, 2, \ldots, \lambda;\ \iota < j.$$

Die Anzahl der Substitutionen $\mathfrak{U}$, welche der obigen Kongruenz genügen, ist das Produkt aller dieser Anzahlen, also wegen $x_1 + \cdots + x_\lambda = n$ gleich

$$p^{n^2\pi-h}\cdot\prod_\iota\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p^{x_\iota}}\right),$$

wobei zur Abkürzung

$$\sum_{\substack{\iota<j \\ \iota,j=1,2,\ldots,\lambda}} x_\iota\, x_j\,(\pi_{\sigma_\iota} + \cdots + \pi_{\sigma_{j-1}}) = h$$

gesetzt worden ist und der Ausdruck unter den Produktzeichen für die λ verschiedenen Werte x_ι zu bilden ist. Endlich ergibt sich für die gesuchte Anzahl der Substitutionsklassen nach obigem der Ausdruck

$$\nu\,(p^{\pi_1}, p^{\pi_2}, \ldots, p^{\pi_{n-1}}) = \frac{\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p^n}\right)}{\prod_\iota\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p^{x_\iota}}\right)}\,p^h.$$

In dem Ausdruck für h erscheint π_{σ_ϱ} multipliziert mit allen Produkten $x_\iota\, x_j$, bei denen $\iota \leqq \varrho$ und $j > \varrho$ ist, d. h. mit

$$(x_1 + \cdots + x_\varrho)\,(x_{\varrho+1} + \cdots + x_\lambda) = \sigma_\varrho\,(n - \sigma_\varrho)\,,$$

so daß auch

$$h = \sum_{\varrho} \pi_{\sigma_\varrho}\,\sigma_\varrho\,(n - \sigma_\varrho) \qquad \varrho = 1, 2, \ldots, \lambda - 1$$

geschrieben werden kann.

Damit ist die gesuchte Anzahl bestimmt, die Anzahl der Linksklassen für dieselbe Elementarklasse ist ebenso groß, die Anzahl der Doppeltklassen ist das Quadrat dieser Anzahl.

Über Asymptoten ebener Kurven.

Von Herrn *Otto Haupt* in Erlangen.

1. In meiner Note gleichen Titels [1]) habe ich unter anderem in Nr. 2 bewiesen, daß $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ existiert und endlich ist, falls das gleiche für $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - xf'(x)]$ zutrifft; dabei bedeutet $f(x)$ eine für alle reellen $0 < a \leqq x$ eindeutige, stetig differenzierbare Funktion der reellen Veränderlichen x.

Herrn *Landau* verdanke ich die Mitteilung, daß mein Ergebnis unmittelbar aus einem Satze von Herrn *Hardy* [2]) folgt. Herr *Hardy* beweist nämlich an genannter Stelle, gleichfalls mittels Auflösung der linearen Differentialgleichung, daß aus $x\,F'(x) - A\,F(x) = o\,(1)$ folgt: $F(x) = C\,x^A + o\,(1)$. Dabei ist A eine reelle oder komplexe Konstante, deren Realteil nicht gleich Null ist; C bedeutet eine Konstante, die insbesondere Null wird, falls der Realteil von A negativ ist. $F(x)$ ist als stetig differenzierbar vorausgesetzt (für alle $a \leqq x$).

Nach Mitteilung von Herrn *Landau* bleibt übrigens der oben (in Absatz 1) angegebene Satz der Nr. 2 meiner Note auch richtig, wenn z. B. $f(x) - xf'(x) = O(x^\vartheta)$, $\vartheta < 1$, vorausgesetzt und wenn überdies nur die Existenz, nicht die Stetigkeit von $f'(x)$ gefordert wird.

Herr *Hardy* verallgemeinert seinen Satz für Differentialgleichungen 2. Ordnung [3]) und weist auf die Verallgemeinerung für beliebige Ordnung hin [4]), aber, wie ich hinzufügen möchte, ohne die Ergebnisse der Nr. 3 meiner Arbeit zu erwähnen. Letztere bleiben ebenfalls bestehen, wenn z. B. bloß die Existenz von $f^{(n)}(x)$ — nicht auch deren Stetigkeit — vorausgesetzt wird.

2. Zu den in Fußnote [1]) Seite 7 genannten Arbeiten vgl. auch noch *Perron, O.*, Über einen Grenzwertsatz (erscheint in der Math. Zeitschrift). Herr *Perron* teilte mir gleichfalls einen Beweis mit dafür, daß im Satze der Nr. 2 meiner Note die Voraussetzung der Stetigkeit von $f'(x)$ entbehrt werden kann.

3. In Nr. 1, Seite 6 meiner Note findet sich ein Versehen, auf das Herr *Tietze* mich aufmerksam macht: In Zeile 14 von unten ist nach den Worten: „Umgekehrt ist dann“ einzuschalten: „nicht notwendig“. In Nr. 3, S. 8, Zeile 7 von oben lies: $n \geqq 0$ statt $n \geqq 1$.

[1]) Diese Zeitschrift, 152 (1922), S. 7 ff.

[2]) *Hardy, G. H.,* Generalisations of a limit theorem of Mr. *Mercer* (Quarterly Journal of pure and applied mathematics Vol 43 (1912), Nr. 3, S. 145).

[3]) *Hardy,* l. c., Nr. 5, S. 146. [4]) *Hardy,* l. c., Nr. 7, S. 148.